Mathematik

Trigonometrie bis zur 10. Klasse

Norbert Meier 2020

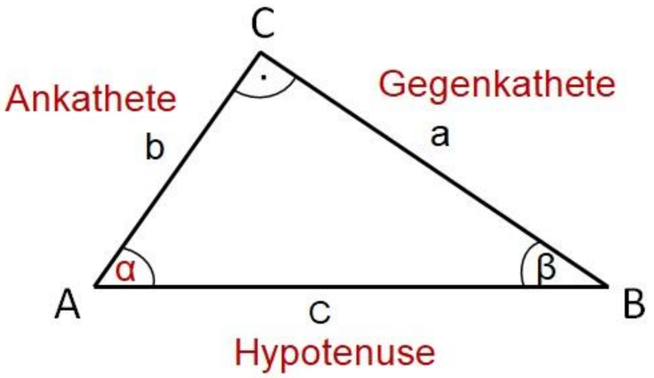
Vorwort zur Trigonometrie

Das Wort Trigonometrie kommt aus der griechischen Sprache und bedeutet Winkelmessung am Dreieck. Bei der Berechnung von Dreiecken werden trigonometrische Funktionen verwendet.

Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck heißt Hypotenuse, sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.

Die Katheten sind die Seiten, die den rechten Winkel bilden. Bezüglich eines bestimmten Winkels, z.B. der Winkel α , unterscheidet man die Gegenkathete und Ankathete.



Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens lauten für den **Winkel α :**

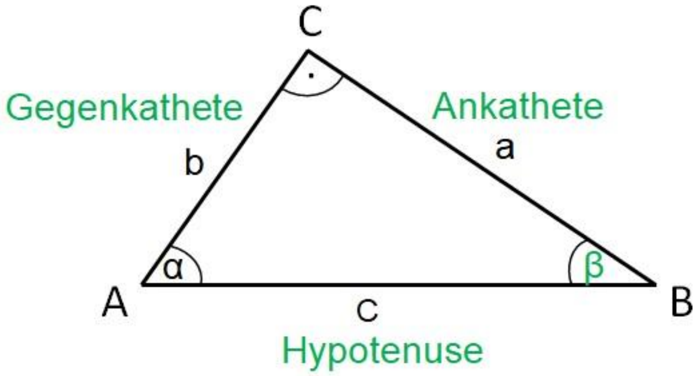
Sinus $$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

Kosinus $$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

Tangens $$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$

Kotangens $$\cot\alpha = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{a}{b}$$

Die trigonometrischen Beziehungen für das folgende Dreieck sind anzugeben.



Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens lauten für den **Winkel $\boldsymbol{\beta}$** :

$$\sin\beta = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\tan ß = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{b}{a}$$

$$\cot ß = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$

Aufgabe:

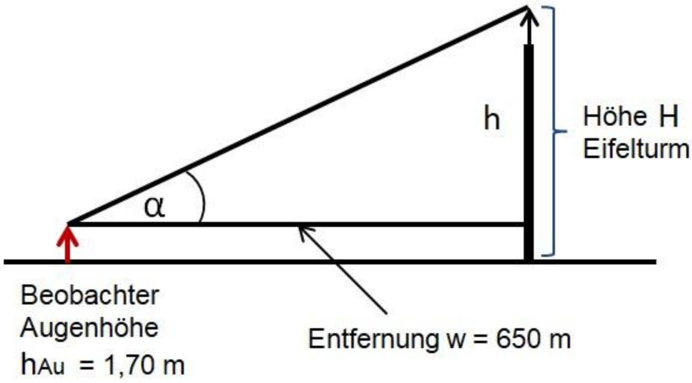
In einem rechtwinkligen Dreieck ist α = 55^0 und die Hypotenuse c = 10,4 cm . Berechne die Seiten a und b . Wie groß ist der Winkel β ?

Benutze die trigonometrischen Formeln und verwende einen Schultaschenrechner.

Die Höhe des Eifelturm

Ein Passant ist noch w = 650 m vom Eifelturm entfernt. Er blickt auf die Spitze des Eifelturms mit einem Erhebungswinkel von $\alpha = 29^0$. Seine Augenhöhe beträgt h_{Au} = 1,70 m.

Den Eifelturm und eine Skizze zeigt das nächste Bild:



Zunächst wird vom Winkel α aus die gegenüberliegende Kathete h berechnet mit:

$$\tan \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{w}}$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{w} \cdot \tan \boldsymbol{\alpha}$$

Die Eifelturmhöhe H berechnet sich dann aus:

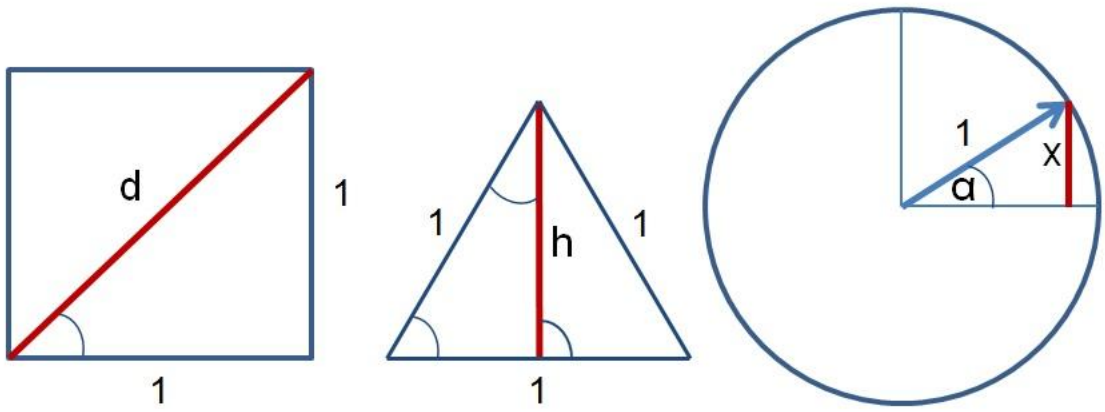
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h_{Au}} + \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h_{Au}} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{tan\alpha}$$

$$H = 1{,}70\ m + 650\ m \cdot tan29^0 = 1{,}70\ m + 650\ m \cdot 0{,}4898\ \text{m}$$

$$\boldsymbol{H = 320\ m}$$

Bestimmung des Wertes von sin α aus geometrischen Figuren

Aus bekannten geometrischen Figuren mit der Einheitslänge 1 sollen die Sinuswerte von den Winkeln $\alpha = 30^0$, $\alpha = 45^0$, $\alpha = 60^0$ und $\alpha = 90^0$, bestimmt werden.



Trage in das Quadrat und in das gleichseitige Dreieck die bekannten Winkelwerte ein. Schreibe die Formel für die Diagonale d und die Formel für die Höhe h auf. Am Einheitskreis soll der x-Wert für den Winkel $\alpha = 90^0$ bestimmt werden.

Bestimme nun die sin-Werte in der obigen Reihenfolge:

$\sin 30^0 =$

$\sin 45^0 =$

$\sin 60^0 =$

$\sin 90^0 =$

Tabelle der möglichen Werte:

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Schultaschenrechner für trigonometrische Berechnungen

Am Beispiel des Taschenrechners TI-30 ECO RS von Texas Instruments werden im folgenden Bild die Tasten für Sinus, Kosinus und Tangens gezeigt.

Zu beachten ist an diesem Rechner, dass nach dem Einschalten im Display automatisch DEG (Winkelgrade) angezeigt wird. Die Winkeleingabe erfolgt in Grad:

Beispiel für eine Winkel-Eingabe: 30 + SIN-Taste ergibt 0.5

oder 45 + SIN-Taste ergibt 0.707106781

oder 60 + SIN-Taste ergibt 0.866025404

oder 90 + SIN-Taste ergibt 1.

Den Winkel bestimmen

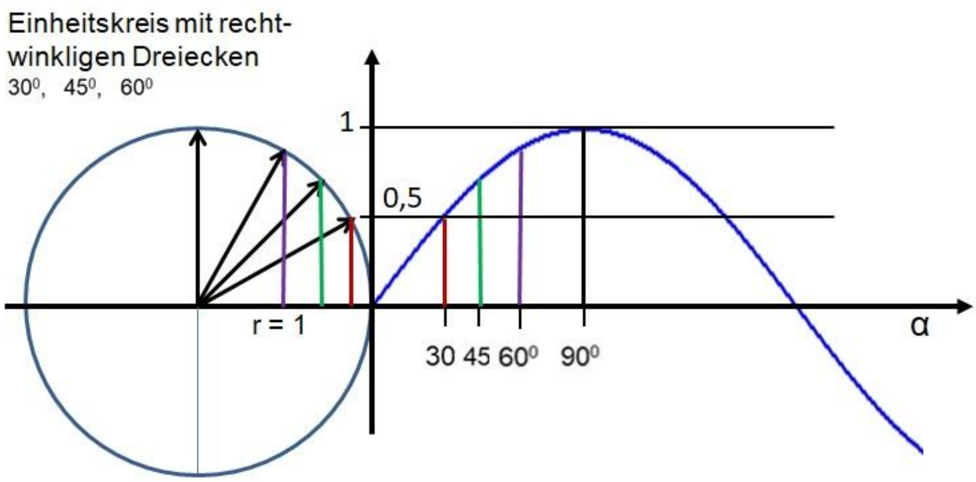
Wenn der Sinus-Wert vorgegeben ist, z.B. 0.5 dann kann der zugehörige Winkel α wie folgt berechnet werden:

0.5 + 2nd-Taste + $\sin^{-1}$-Taste ergibt den Winkel 30 Grad.

Konstruktion der Kurve sin(α)

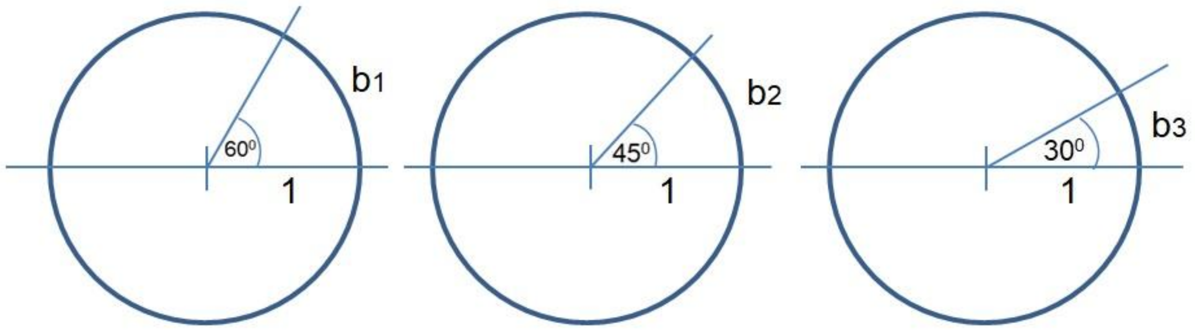
Im Einheitskreis dreht sich ein Pfeil. Die dadurch entstehenden Dreiecke sollen nur für bestimmte Winkel und zwar 30^0, 45^0, 60^0, und 90^0 ausgewertet werden.

Im angrenzenden Koordinatensystem wird auf der horizontalen Achse der Winkel in Grad aufgetragen. Die Winkelwerte und die zugehörige Gegenkathete im Koordinatensystem ergeben eine Sinuskurve.



Der Radiant (Bogenmaß) ist ein Winkelmaß

Im Einheitskreis wird nun der Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens angegeben.



Beachte: Der Umfang im Einheitskreis ist $U = 2\pi \cdot r = 2\pi$

Zum Winkel von 60^0 gehört im Einheitskreis der Bogen b1 = $\pi/3$

Zum Winkel von 45^0 gehört im Einheitskreis der Bogen b2 = $\pi/4$

Zum Winkel von 30^0 gehört im Einheitskreis der Bogen b3 = $\pi/6$

Eine nützliche Tabelle:

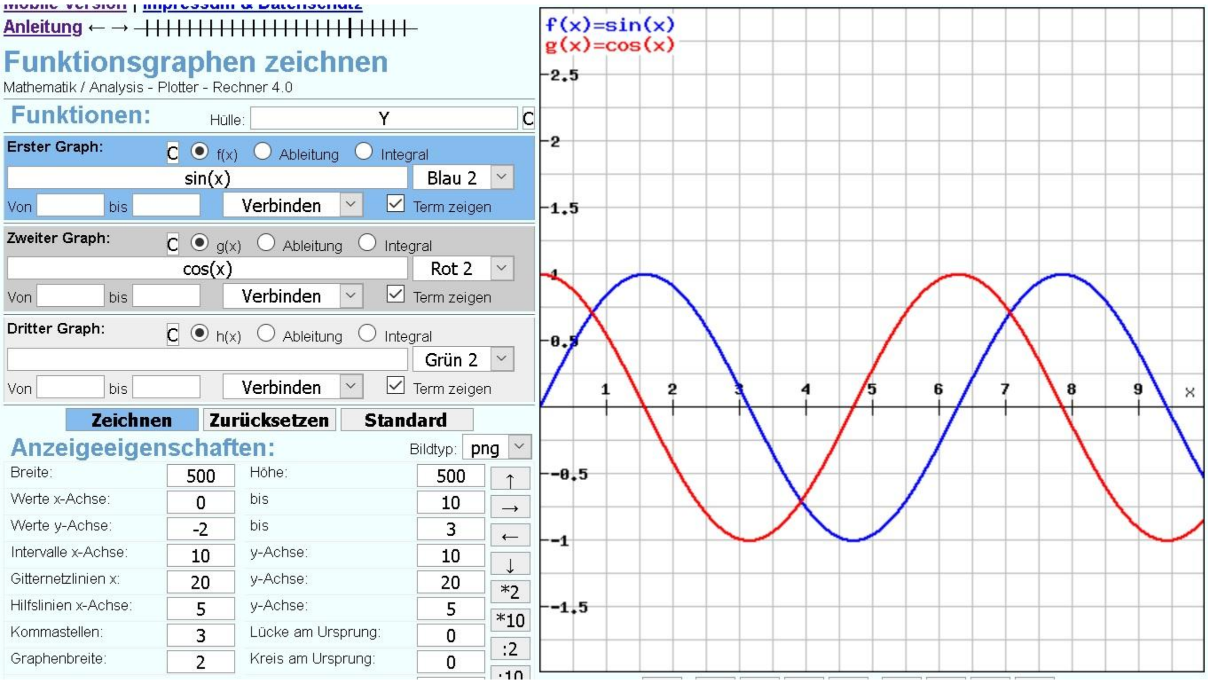
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Winkel	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Kurvenverlauf von sin(x) und cos(x)

Der Wert x wird im Bogenmaß angegeben.

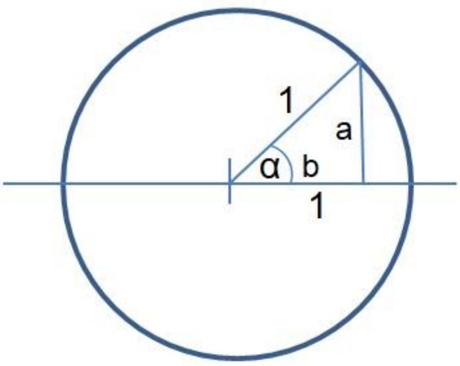
Aufgabe:

Wie groß ist eine Periode auf der x-Achse ?



Der Satz des Pythagoras mit sin(α) und cos(α)

Die folgende Zeichnung zeigt den Einheitskreis mit einem rechtwinkligen Dreieck.



Wegen $a^2 + b^2 = 1$ und sin(α) = a und cos(α) = b folgt:

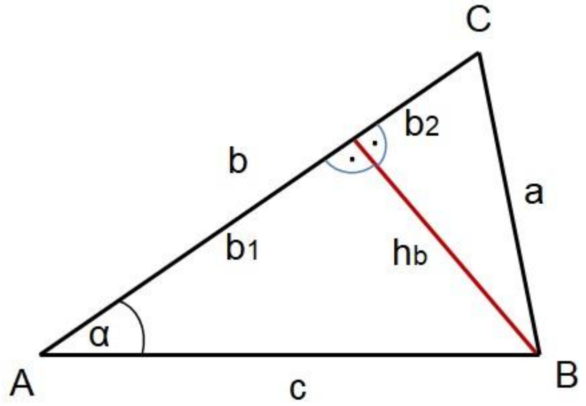
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Der Kosinussatz mit Beweis

Sind im allgemeinen Dreieck A,B,C mit dem Winkel α die beiden anliegenden Seiten b und c gegeben, so kann die dem Winkel α gegenüber liegende Seite berechnet werden mit der Formel:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

Beweis mit eingezeichneter Höhe h_b :



Die Höhe h_b teilt die Seite b in die beiden Abschnitte b_1 und b_2 .

$$\cos\alpha = \frac{b_1}{c} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_1 = c \cdot \cos\alpha}$$

$$b_1{}^2 + h_b{}^2 = c^2 \quad \rightarrow \quad h_b{}^2 = c^2 - b_1{}^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{h_b{}^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$$b_1 + b_2 = b \quad \rightarrow \quad b_2 = b - b_1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b_2 = b - c \cdot \cos\alpha}$$

$$a^2 = h_b{}^2 + b_2{}^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2\alpha + (b - c \cdot \cos\alpha)^2$$

$$a^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2\alpha + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + c^2 \cdot \cos^2\alpha$$

Es bleiben über:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

Ebenso kann man herleiten:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha}$$

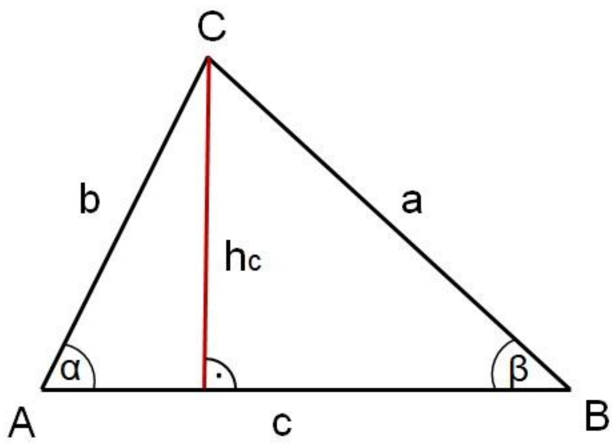
$$\boldsymbol{c = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}$$

Der Sinussatz mit Beweis

In jedem Dreieck verhalten sich die Längen der Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Beweis für a und b:



$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$ und $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$

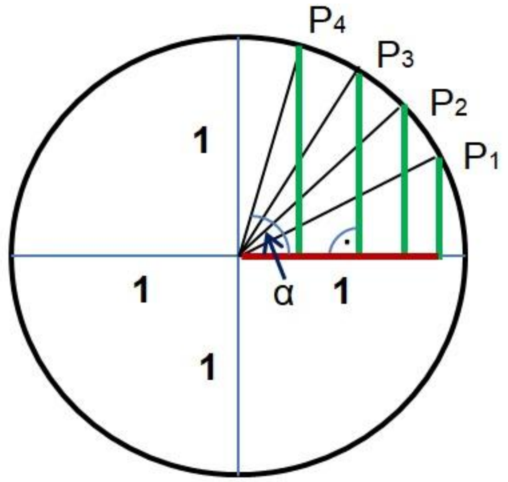
Also ist:

$h_c = b \cdot \sin(\alpha)$ und $h_c = a \cdot \sin(\beta)$

$a : b = \sin(\alpha) : \sin(\beta)$

Konstruktion der Kurve tan(α)

Im Einheitskreis werden rechtwinklige Dreiecke eingezeichnet. Die beiden Katheten werden farbig hinterlegt:



Dreieck mit P_1 und $\alpha = 30^o$

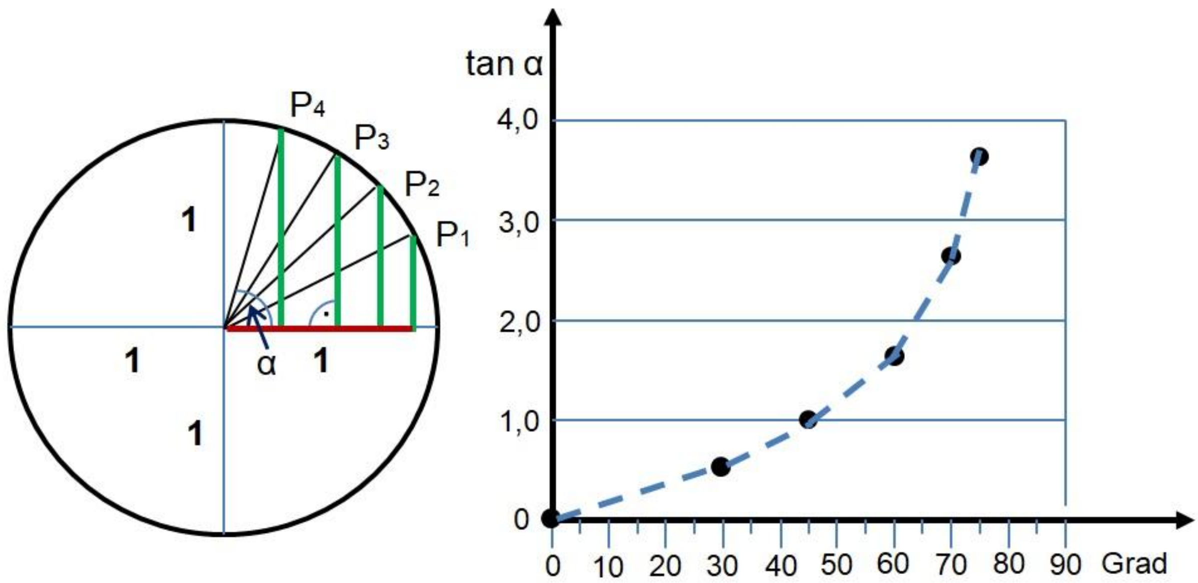
Dreieck mit P_2 und $\alpha = 45^o$

Dreieck mit P_3 und $\alpha = 60^o$

Dreieck mit P_4 und $\alpha = 75^o$

Die Definition vom Tangens ist: $\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$

Für die obigen Winkel α sollen nun die Tangenswerte berechnet werden, indem die Quotienten a/b aus der Abbildung durch Ausmessung ermittelt werden. Die Ergebnisse lauten: tan30^0 = 0.4, tan45^0 = 1, tan60^0 = 1.5 und tan75^0 = 3.5 und liefern die folgende Grafik:

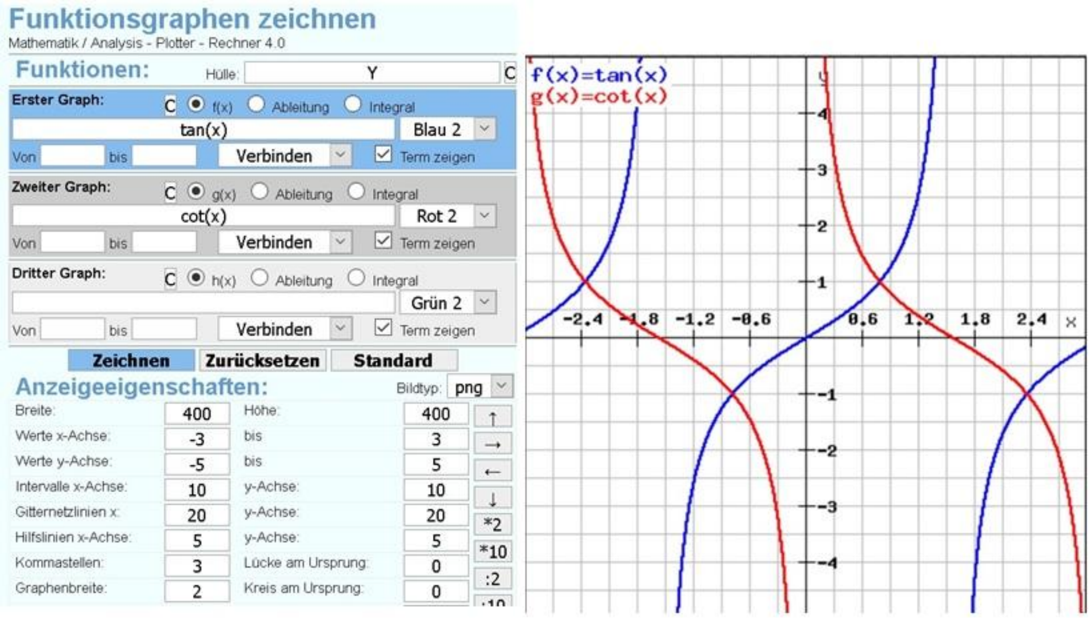


Die tan-Kurve steigt stark an und geht auf sehr hohe Werte vor 90^0 .

Funktionsverlauf von tan(x) und cot(x)

Der Wert x wird im Bogenmaß angegeben.

Aufgabe: Wo befinden sich auf der x-Achse der Wert für π/2 ?



Einige Grundregel bei sin(α), cos(α), tan(α) und cot(α)

Aus der Formel $\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ lauten die abgeleiteten Formeln:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$$

Mit $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ folgt $\tan\alpha = \frac{sin\alpha}{\sqrt{1-sin^2\alpha}}$

Der 1. und 2. Additionssatz von Sinus und Cosinus

Der 1. Additionssatz lautet:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Der 2. Additionssatz lautet:

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Der 3. und 4. Additionssatz von Sinus und Cosinus

Der 3. Additionssatz lautet:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Der 4. Additionssatz lautet:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Folgerungen aus dem 1. Additionssatz für sin(2α)

Der 1. Additionssatz lautet:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Wenn $\alpha = \beta$ gesetzt wird folgt

$\sin(\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

Folgerungen aus dem 1. Additionssatz für cos(2α)

Wenn $\alpha = \beta$ gesetzt wird folgt

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

$$\mathbf{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}$$

Übersicht der Dokumentationen

„Algebra bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mathe/Algebra.pdf

„Geometrie bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mathe/Geometrie.pdf

„Trigonometrie bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mathe/Trigonometrie.pdf

„Elektrizitätslehre bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Elektro/Elektrizitätslehre.pdf

„Mechanik bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mechanik/Mechanik.pdf