Mathematik in der Oberstufe

Extremwertaufgaben

Norbert Meier 2022

Einleitung zu den Extremwertaufgaben

Bei einer Extremwertaufgabe liegt eine Fragestellung vor, bei der eine Größe unter bestimmten Bedingungen ein Maximum oder ein Minimum annehmen soll.

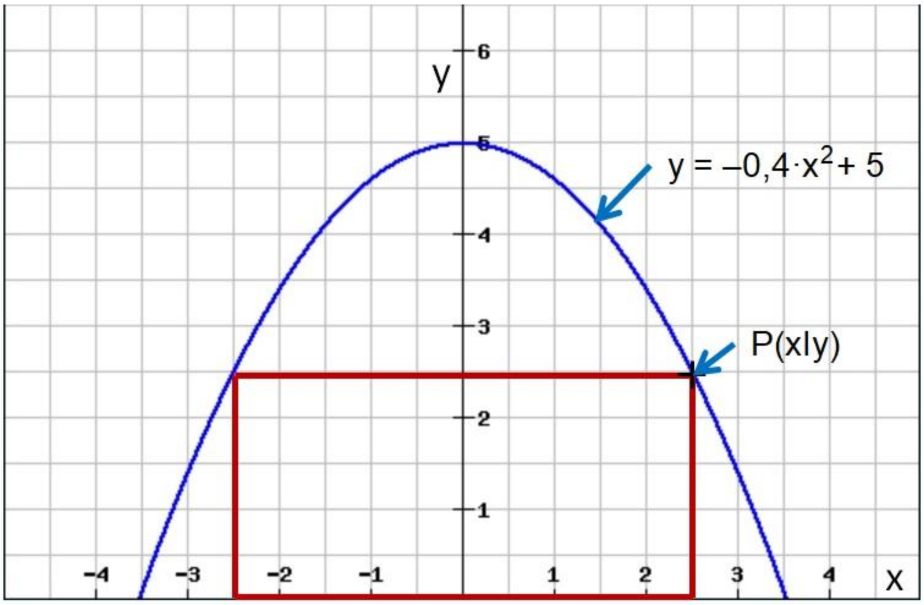
Zuerst muss die zu optimierende Größe als Funktion einer oder zwei Variablen beschrieben werden. Bei zwei Variablen wird noch eine Bedingung (Nebenbedingung) vorgeschrieben.

Gesucht wird das Maximum oder Minimum einer Funktion F(x). Dazu bildet man die 1. Ableitung der Funktion F(x) und bestimmt die Nullstellen von der 1. Ableitung

$$F'(x_E) = 0$$

Extremwertaufgaben mit einer Parabel

An der Stirnwand einer parabelförmigen Halle soll ein möglichst großes rechteckiges Plakat angebracht werden. Wo liegt der Eckpunkt P des Rechteckes mit maximaler Größe ?



Die Formel für die Fläche des gesuchten Rechtecks lautet:

$$F = 2 \cdot x \cdot y$$

Die Nebenbedingung liefert der Punkt P(xly) auf der Parabel:

$y = –0{,}4 \cdot x^2 + 5$

Die Formel für die Fläche ist damit

$F(x) = -0{,}8\,x^3 + 10x$ und die 1. Ableitung $F'(x) = -2{,}4\,x^2 + 10$ nimmt den Wert Null an bei

$x^2 = \frac{10}{2{,}4} = \frac{5}{1{,}2}$ und damit wird $x = \pm\sqrt{\frac{5}{1{,}2}} \approx 2{,}04$

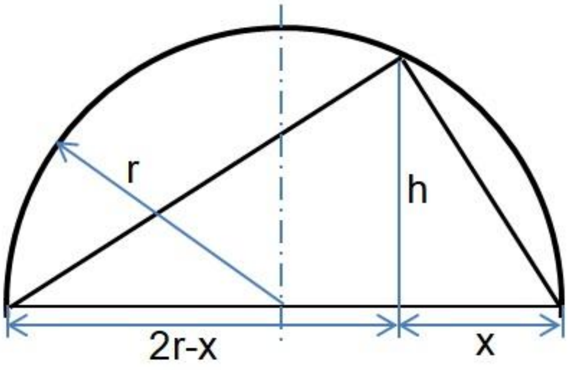
und $y = -0{,}4 \cdot \frac{5}{1{,}2} + 5 = \frac{10}{3} \approx 3{,}3$

Das zu bestimmende Rechteck hat eine maximale Größe von

$F = 2 \cdot x \cdot y = 2\sqrt{\frac{5}{1{,}2}} \cdot \left(-0{,}4 \cdot \frac{5}{1{,}2} + 5\right) = 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{1{,}2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{1{,}2}} \approx 13{,}6\ \text{FE}$

Extremwertaufgaben mit Halbkreis und Dreieck

Einem Halbkreis ist ein Dreieck mit möglichst großem Inhalt einzubeschreiben. Wie sind die Katheten des Dreiecks zu wählen ?



Die Fläche des Dreiecks ist: $F = r \cdot h$

Nach dem Höhensatz ist $h^2 = x(2r - x)$

Wenn F ein Maximum hat, dann hat auch F^2 ein Maximum

$F^2 = r^2 \cdot h^2 = r^2 \cdot (2rx - x^2)$

Die Funktion $f(x) = 2rx - x^2$ wird abgeleitet.

Die 1. Ableitung lautet $f'(x) = 2r - 2x$ und nimmt den Wert Null an für

$x = r$.

Die Höhe berechnet sich aus:

$$h = \sqrt{x(2r - x))} = \sqrt{r^2 = r}$$

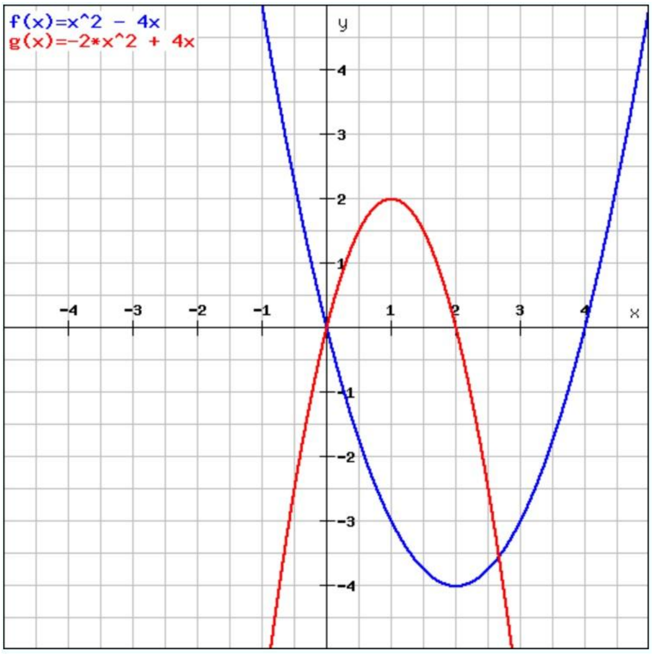
Wenn auch **$h = r$** ist, wird die Fläche **$F = r^2$,** d.h. die Katheten haben eine Länge von **$r \cdot \sqrt{2}$**

Extremwertaufgaben mit zwei Parabeln

Im Intervall 0 bis 3 schneiden sich zwei Parabeln mit den Funktions-gleichungen

$f(x) = x^2 - 4x$ und $g(x) = -2x^2 + 4x$

An welcher Stelle haben die beiden Kurven den größten Abstand ?



Der Abstand d beider Funktionen kann berechnet werden mit der Funktion:

$d(x) = g(x) - f(x) = -3x^2 + 8x$

Die 1.Ableitung lautet:

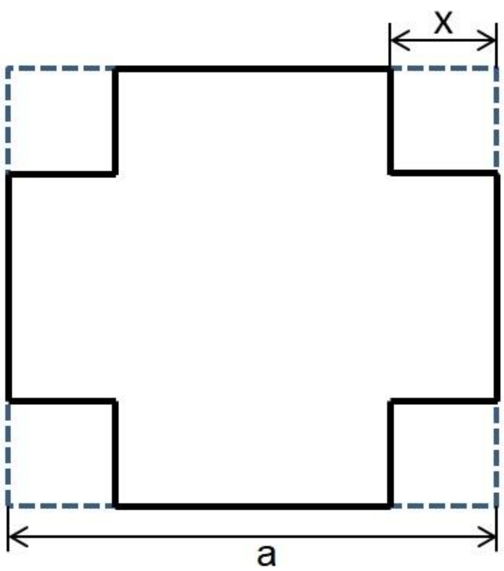
$d'(x) = -6x + 8$

Die Nullstelle und damit die Lösung liegt bei $x = \frac{4}{3}$

Der größte Abstand ist dann $d = -3 \cdot \frac{16}{9} + \frac{32}{3} = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$

Extremwertaufgaben für einen Blechkasten

Aus den 4 Ecken eines quadratischen Bleches mit der Seite a sollen gleiche Quadrate ausgeschnitten und aus den übrigbleibenden Stück ein offener Kasten gefertigt werden. Wie groß müssen die Seiten der auszuschneidenden Quadrate gemacht werden, wenn man einen möglichst großen Inhalt des Kastens erzielen will ?



Der Kasten hat eine Länge von $a - 2x$ und somit ist der Inhalt

$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$

Die 1. Ableitung wird gebildet und auf Null gesetzt.

$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = (a - 2x)\cdot(a - 6x) = 0$

Die Lösungen sind

$x_1 = \frac{a}{2}$ und $x_2 = \frac{a}{6}$ wobei x_1 ausscheidet.

Das gesuchte Volumen berechnet sich aus:

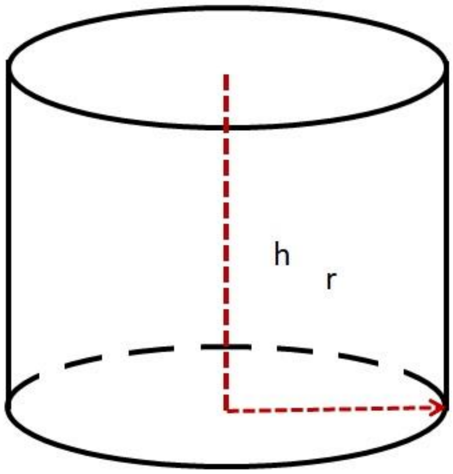
$$V = \left(a - \frac{2a}{6}\right)\left(a - \frac{2a}{6}\right) \cdot \frac{a}{6} = a^3 \cdot \frac{2}{27}$$

Ist die Seitenlänge z.B. a = 24 cm , so beträgt das maximale Volumen

$V = 1024\ cm^3$

Extremwertaufgaben für die Oberfläche von einem Zylinder

Zu entwerfen ist eine Konservendose mit einem Volumen von V=1 Liter. Wie groß ist der Radius r und die Höhe h zu wählen, wenn die Oberfläche O ein Minimum sein soll.



Die Oberfläche (O) des Zylinders setzt sich zusammen aus der Mantellinie (M), dem Boden und dem Deckel. Die Formel für die Oberfläche ist damit

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

und das Volumen berechnet sich aus $V = \pi r^2 \cdot h$. Die Volumenformel wird nach h aufgelöst

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

und in die Oberflächenformel, die von der Veränderlichen r abhängig ist, eingesetzt.

$$O(r) = \frac{2 \cdot V}{r} + 2\pi r^2$$

Nun folgt die Bildung der 1. Ableitung, von der die Nullstellen gesucht werden.

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

Wenn $0 = 2(2\pi r^3 - V)$ gesetzt wird, folgt $\boldsymbol{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$.

Die Berechnung von der Höhe h ist etwas aufwendig.

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}}$$ Nach der Erweiterung mit 4^2 erhält man für h

$$h = \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi \cdot 4^2 \cdot V^2}}$$ Nun kann für 4V geschrieben werden $4V = \sqrt[3]{4^3 \cdot V^3}$

$$h = \frac{\sqrt[3]{4^3 \cdot V^3}}{\sqrt[3]{\pi \cdot 4^2 \cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4^3 \cdot V^3}{\pi \cdot 4^2 \cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

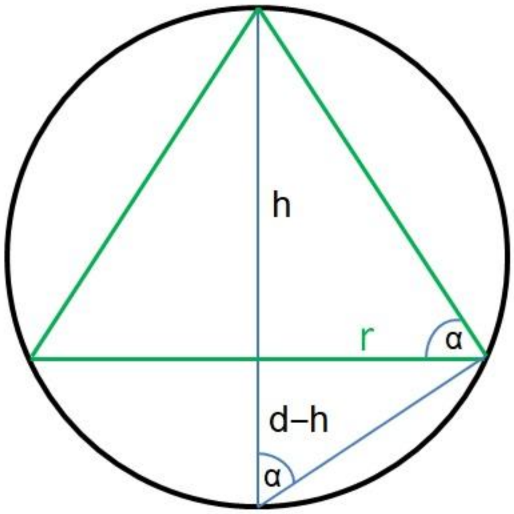
Nach den Kürzungen in der Wurzel folgt schließlich für die Höhe h

$$\mathbf{h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2 \cdot r = d}$$

D.h. die Höhe des Zylinders h ist gleich dem Durchmesser d, wenn die Oberfläche des Zylinders ein Minimum sein soll.

Extremwertaufgaben mit einer Kugel und einem Kegel

Einer Kugel vom Durchmesser d ist ein Kegel von möglichst großem Inhalt einzubeschreiben. Gesucht wird die Höhe h, der Grundkreisradius r und der Inhalt V_{max} des Kegels.



Das Volumen eines Kegels berechnet sich aus: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

Die Abbildung zeigt zwei gleiche Winkel α , daher gilt:

$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{d-h}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{r}}$ und umgeformt nach dem Radius $\mathrm{r}^2 = \mathrm{h} \cdot (\mathrm{d} - \mathrm{h})$.

Für das Volumen folgt dann:

$$\mathrm{V(h)} = \frac{\pi}{3} \cdot \mathrm{h(d-h)} \cdot \mathrm{h} = \frac{\pi}{3} \cdot \mathrm{h}^2(\mathrm{d-h}) = \frac{\pi}{3}(\mathrm{dh}^2 - \mathrm{h}^3)$$

Die 1. Ableitung von V(h) ist:

$$\mathrm{V'(h)} = \frac{\pi}{3} \cdot (2\mathrm{dh} - 3\mathrm{h}^2) = \frac{\pi}{3}\mathrm{h}(2\mathrm{d} - 3\mathrm{h})$$

Die 1. Ableitung wird Null gesetzt und eine brauchbare Lösung ist:

$$\mathbf{h = \frac{2}{3} \cdot d}$$

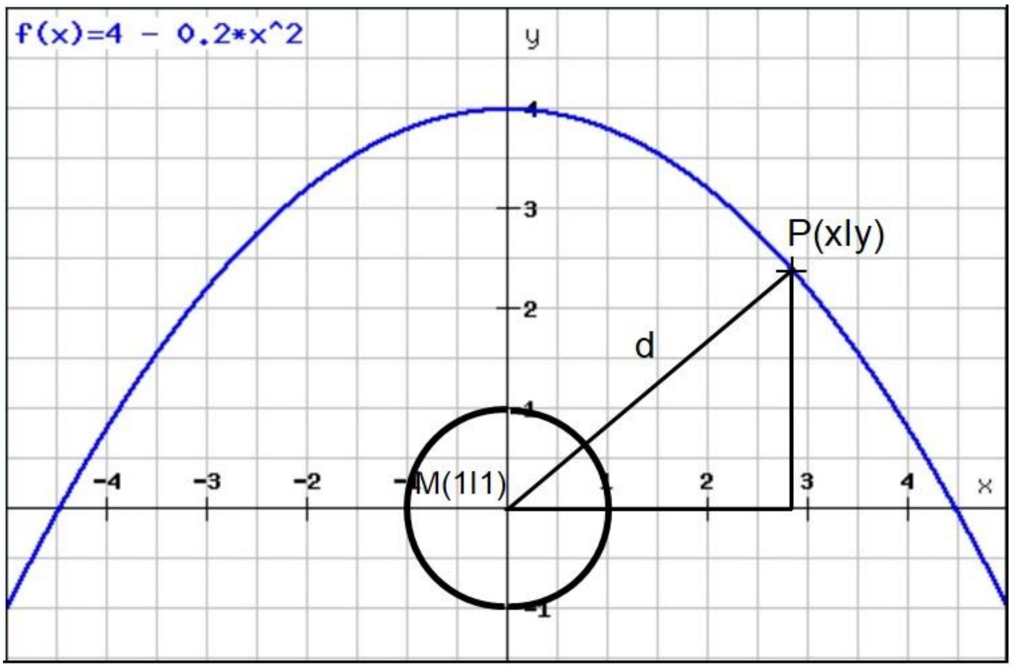
Für den Radius r folgt dann:

$\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{h(d-h)}} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}(\mathrm{d} - \frac{2}{3}\mathrm{d}} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}^2 \cdot \frac{1}{3}}$ mit dem Ergebnis $\mathbf{r = \frac{d}{3}\sqrt{2}}$

Extremwertaufgaben mit minimalem Abstand zur Kurve

Ein Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M(0I0) liegt unterhalb einer Parabel. Gesucht wird der minimale Abstand vom Mittelpunkt M zum Punkt P(xIy), der sich auf der Parabel befindet mit der Funktionsgleichung

$$y(x) = 4 - 0{,}2 \cdot x^2$$



Der Abstand d zwischen den Punkten M und P ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreieck

$d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (4 - 0{,}2 \cdot x^2)^2$

$d^2 = x^2 + 16 - 1{,}6x^2 + 0{,}04x^4 = 0{,}04x^4 - 0{,}6x^2 + 16$

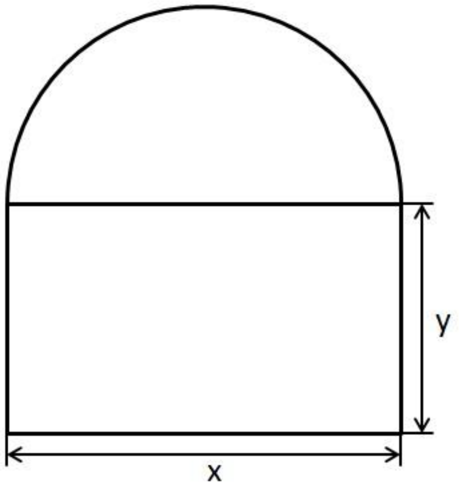
$(d^2)' = 0{,}14x^3 - 1{,}2x = 0$

$0{,}14x^2 - 1{,}2 = 0 \quad x^2 = \frac{1{,}2}{0{,}14}$

X ≈ 2,93

Extremwertaufgaben an einem Kirchenfenster

Ein rechteckiges Fenster mit aufgesetztem Rundbogen soll bei möglichst großer Fläche eine Umrandung von U = 6 m haben. Welche Maße sind für die Fenster zu wählen ?



Die Gesamtfläche F berechnet sich aus.

$$F = x \cdot y + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \pi = x \cdot y + \frac{x^2 \cdot \pi}{8}$$

Der gesamte Umfang U ist $U = 6 = x + 2y + \frac{x \cdot \pi}{2}$

Daraus folgt für y: $y = \frac{12 - 2x - x \cdot \pi}{4} = \frac{12 - x(\pi + 2)}{4}$

Eingesetzt in die Flächenformel wird:

$$F = x \cdot \frac{12 - x \cdot \pi - 2x}{4} + \frac{x^2 \cdot \pi}{8} = \frac{24x - x^2 \cdot \pi - 4x^2}{8}$$

Die 1. Ableitung wird auf Null gesetzt

$$F' = \frac{1}{8} \cdot (24 - 2x\pi - 8x) = 0 = \frac{1}{4}(12 - \pi x - 4x)$$

Für x folgt $\mathbf{x = \frac{12}{\pi + 4}}$