Mathematik in der Oberstufe

Differentialrechnung

Norbert Meier 2022

Differenzienquotient und Differentialquotient

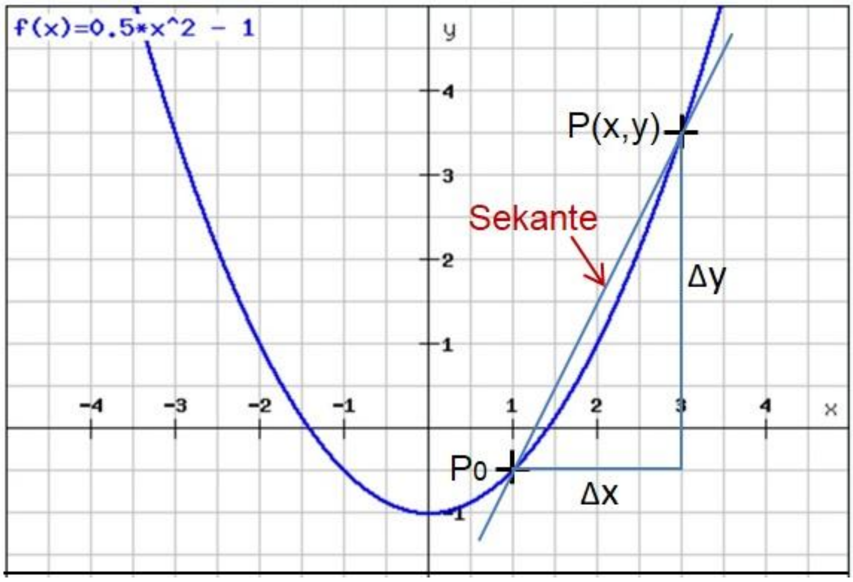
Gegeben ist ein Graph mit der Funktion f(x). Ein Punkt P_0 auf dem Graphen hat die Koordinaten ($x_0|y_0$). Ein zweiter in der Nähe liegender Punkt auf dem Graphen hat die Koordinaten P(x|y). Die kleine Differenz lautet dann

$$\Delta y = y - y_0$$

und $$\Delta x = x - x_0 \quad .$$

Der Quotient $\Delta y/\Delta x$ wird Differenzenquotient genannt.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



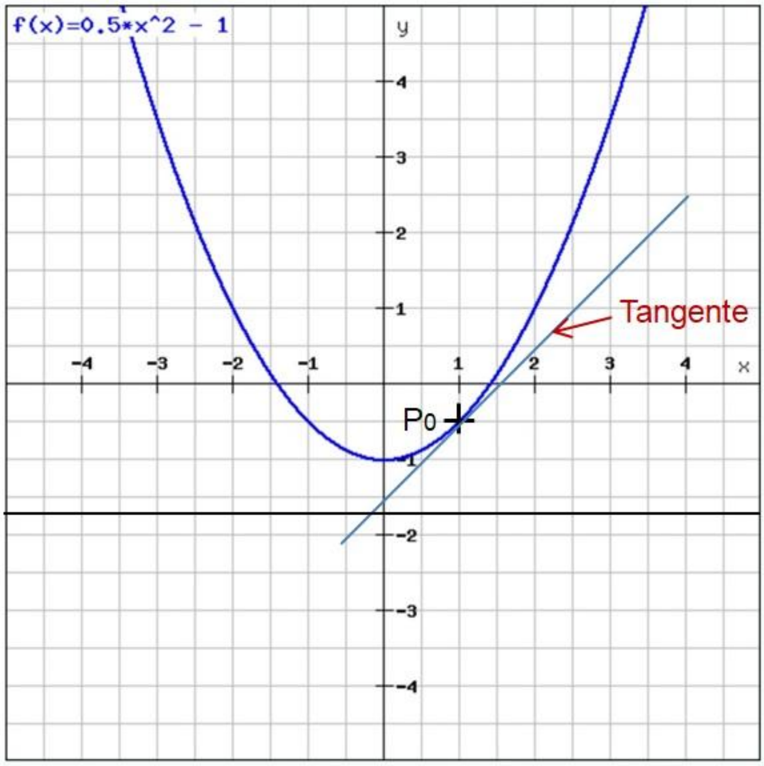
Wandert der Punkt P auf den Punkt P_0 zu, so werden die Differenzen Δx und Δy immer kleiner. Die Sekante geht dann in die Tangente in P_0 über.

Der Limes $x \to x_0$ kann mathematisch wie folgt berechnet werden und liefert den Differentialquotient.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx}$$

Der Differentialquotient dy/dx wird auch 1. Ableitung der Funktion f(x) genannt: $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$

Der Differentialquotient gibt die Steigung des Graphen an einer einzigen Stelle $P_0(x_0 I y_0)$ an. Die Steigung des Graphen an einem Punkt $P_0(x_0 I y_0)$ ist gleich der Steigung der Tangente an diesem Punkt.



Für die im Beispiel gegebene Funktion $F(x) = 0.5 \cdot x^2 - 1$ berechnet sich der Differentialquotient

$$\lim_{x \to x_0} \frac{0.5\, x^2 - 1 - \left(0.5 x_0{}^2 - 1\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0.5\left(x^2 - x_0{}^2\right) - 1 + 1)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{0.5(\,x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0.5\,(x + x_0) = 0.5 \cdot 2x_0 = x_0$$

Ergebnis:

Die Tangente am Punkt $P_0(1 I -0.5)$ hat die Steigung $m = 1$

Für die 1. Ableitung von Potenzen von x, z.B. x^2, x^3, x^4 usw.

lautet die Ableitungsregel, wenn $y = x^n$ vorliegt :

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

Herleitung der Ableitungsregel für Potenzen von x

Die 1. Ableitung der Funktion **f(x) = x²** wird mit der Limesbildung ermittelt.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$\boldsymbol{y' = 2x}$$

Die 1. Ableitung der Funktion **f(x) = x³** wird mit der Limesbildung ermittelt.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2)\cdot(x+\Delta x) - x^3}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2\cdot\Delta x + x\cdot\Delta x^2 + x^2\cdot\Delta x + 2x\cdot\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x^2 + x^2)$$

$$y' = \quad \boldsymbol{y' = 3x^2}$$

Die 1. Ableitung der Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten n in der Form **f(x) = xⁿ** setzt die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes voraus. Die Limesbildung lautet:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Für den Term $(x + \Delta x)^n$ wird der binomische Lehrsatz angewendet:

$$(x + \Delta x)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k$$

Der Ausdruck für die Limesbildung geht dann über nach:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x\Delta x^{n-1} + \binom{n}{n}\Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

Im Zähler ist $\binom{n}{0} = 1$ und man erhält für die Potenzregel

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x\Delta x^{n-1} + \binom{n}{n}\Delta x^n}{\Delta x}$$

Nach der Kürzung mit Δx vereinfacht sich der obige Ausdruck zu:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + \binom{n}{n-1} x\Delta x^{n-2} + \binom{n}{n} \Delta x^{n-1}\right]$$

Der Grenzübergang kann erfolgen mit Δx = 0 und es verbleibt nur noch:

$y' = \binom{n}{1}x^{n-1}$ = n$\cdot x^{n-1}$

Das Ergebnis für die Potenzregel ist also, wenn **f(x) = x^n** vorliegt:

$$\mathbf{f'(x) = y' = n \cdot x^{n-1}}$$

Anmerkungen zur Schreibweise der Binomialkoeffizienten

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$, gesprochen n über k, ist die Kurzschreibweise für die Binomialkoeffizienten und hat folgende Berechnungsvorschrift unter Verwendung der Fakultät von n und k :

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Beispiel: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1)} = 6$

Weitere Ableitungsregeln

Summenregel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = u(x) + v(x)$

Die 1. Ableitung lautet: $\boldsymbol{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$

Beispiel: $f(x) = x^7 + x^3$ $f'(x) = 7x^6 + 3x^2$

Konstantenregel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot x^4$

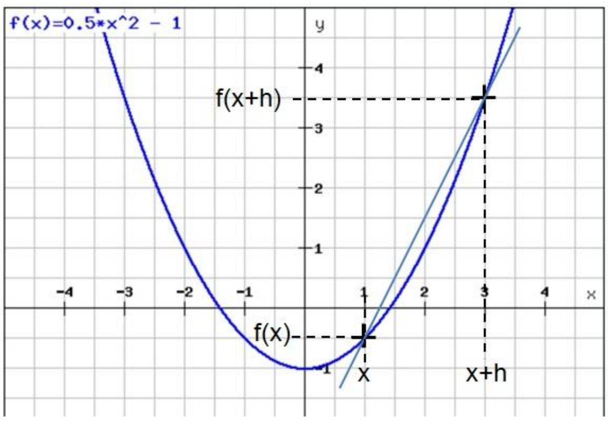
Die 1. Ableitung lautet: $f'(x) = 4ax^3$

Beispiel: $f(x) = 4x^6 + 3x^3$ $f'(x) = 24x^5 + 9x^2$

Multiplikations- oder Produktenregel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Im Folgenden wird die Limesbildung anstatt mit Δx mit dem kleinen Abstand h durchgeführt. Diese Substitution wird in der heutigen Literatur h-Methode genannt.



Die Limesvorschrift lautet nun:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Eine Erweiterung im Zähler in der Form -u(x)·v(x+h) + u(x)·v(x+h), die insgesamt Null ergibt, wird eingefügt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) \boldsymbol{- u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h)} - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Nun erfolgt eine Faktorisierung und für die Limesbildung folgt danach:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] \cdot v(x+h) + u(x) \cdot [v(x+h) - v(x)]}{h}$$

Die einzelnen Limesbildungen sind nun:

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} v(x+h)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} u(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}$$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Wenn eine Funktion f(x) aus zwei Faktoren u(x) und v(x) besteht, werden die Faktoren einzeln abgeleitet.

Beispiel:

$y = (x^3 - 1) \cdot (8 + x^4)$

$u(x) = x^3 - 1$ $u'(x) = 3x^2$ und $v(x) = 8 + x^4$ $v'(x) = 4x^3$

$y' = 3x^2 \cdot (8 + x^4) + (x^3 - 1) \cdot 4x^3 = 24x^2 + 3x^6 + 4x^6 - 4x^3$

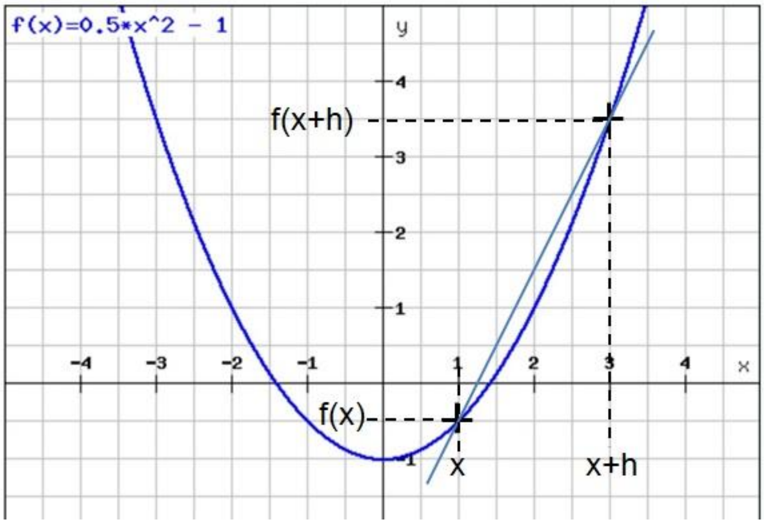
$y' = 7x^6 - 4x^3 + 24x^2$

$y' = x^2 \cdot (7x^4 - 4x + 24)$

Herleitung der Quotientenregel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Im Folgenden wird die Limesbildung anstatt mit Δx mit dem kleinen Abstand h durchgeführt. Diese Substitution nennt man in der heutigen Literatur h-Methode.



Die Limesvorschrift lautet nun:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

Im Zähler wird die Bildung des Hauptnenners durchgeführt. Dann erfolgt die Division mit h über die Kehrwertbildung.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)} \cdot \frac{1}{h}$$

Eine Erweiterung im Zähler in der Form -u(x)·v(x) + u(x)·v(x), die insgesamt Null ergibt, wird eingefügt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x) \boldsymbol{- u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)} - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)} \cdot \frac{1}{h}$$

v(x) und u(x) werden ausgeklammert. Außerdem wird das Minuszeichen ausgeklammert.

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] \cdot v(x) - u(x) \cdot [v(x+h) - v(x)]}{h}$$

Die einzelnen Limesbildungen sind nun,

$$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} v(x) - \lim_{h\to 0} u(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x+h) \cdot v(x)}$$

und ergeben die Lösung in der Form:

$$\boldsymbol{f^{'}(x) = \frac{u^{'}(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}}$$

1. Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^5}{10x - 1}$$

$u(x) = 3x^5 \qquad u'(x) = 15x^4 \qquad v(x) = 10x - 1 \qquad v'(x) = 10$

$$f'(x) = \frac{15x^4(10x - 1) - 3x^5 \cdot 10}{(10x - 1)^2}$$

$$f'^{(x)} = \frac{120x^5 - 15x^4}{(10x - 1)^2}$$

2. Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - 3x}$$

$u(x) = x^2 - 1 \qquad u'(x) = 2x \qquad v(x) = 2 - 3x \qquad v'(x) = -3$

$$f'(x) = \frac{2x(2-3x) - (x^2-1)\cdot(-3)}{(2-3x)^2} = \frac{4x - 6x^2 + 3x^2 - 3}{(2-3x)^2}$$

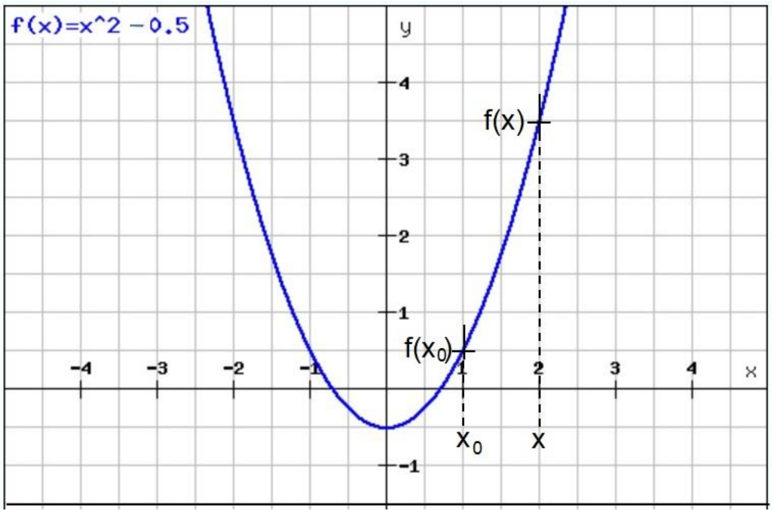
$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(2 - 3x)^2}$$

Herleitung der Kettenregel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = u(v(x))$

$f(x) = u(v(x))$ und $f(x_0) = u(v(x_0))$

Die Limesvorschrift lautet, wie aus der folgenden Abbildung ersichtlich:



$$f'(x) = \lim_{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mit der äußeren Funktion u und der inneren Funktion v folgt:

$$f'(x) = \lim_{x - x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0}$$

Der Limesausdruck wird erweitert mit $\frac{v(x) - v(x_0)}{v(x) - v(x_0)}$

$$\frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0} = \frac{u(v(x) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Für v(x) = v und $v(x_0) = v_0$ folgt vereinfacht

$$\frac{u(v) - u(v_0)}{v - v_0} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$\boldsymbol{f'(x) = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)}$ u ist die äußere und v ist die innere Funktion.

1. Beispiel:

$\mathrm{f(x)} = (3x-2)^4 \qquad mit\ \ v = 3x-2$

$\mathrm{u(v)} = \mathrm{v}^4 \quad \mathrm{u'(v)} = 4\mathrm{v}^3 \quad \mathrm{v(x)} = 3\mathrm{x}-2 \quad \mathrm{v'(x)} = 3$

$f'(x) = 4(3x-2)^3 \cdot 3$

$f'(x) = 12(3x-2)^3$

2. Beispiel:

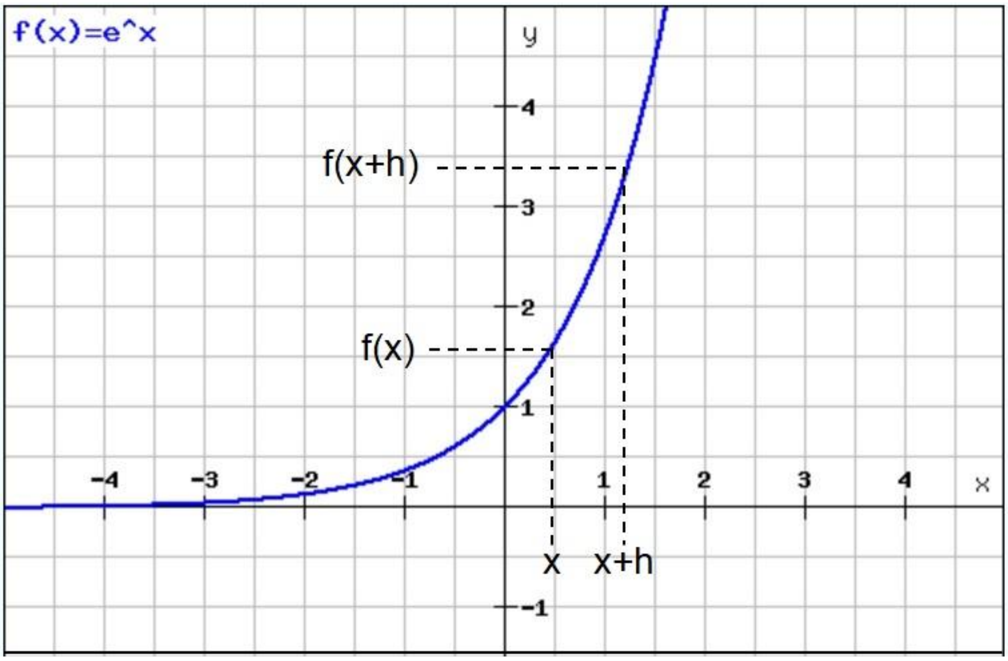
$\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x}^2-1}$ mit $u(v) = v^{\frac{1}{2}} \qquad v = \mathrm{x}^2-1 \quad \mathrm{v}' = 2\mathrm{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\mathrm{x}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Herleitung der 1. Ableitung von der e-Funktion

Die e-Funktion f(x) = e^x wird in der folgenden Grafik gezeigt.



Die 1. Ableitung liefert die Steigung von einem Punkt P auf der Kurve an der Stelle x. Die Steigung erhält man unter Anwendung der h-Methode durch die Limesvorschrift:

$$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{f(x+h) - f(x_x)}{h}$$

Für die e-Funktion gilt:

$$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Mit der Potenzregel wird im vorliegenden Fall $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$ und die Limesbildung lautet dann:

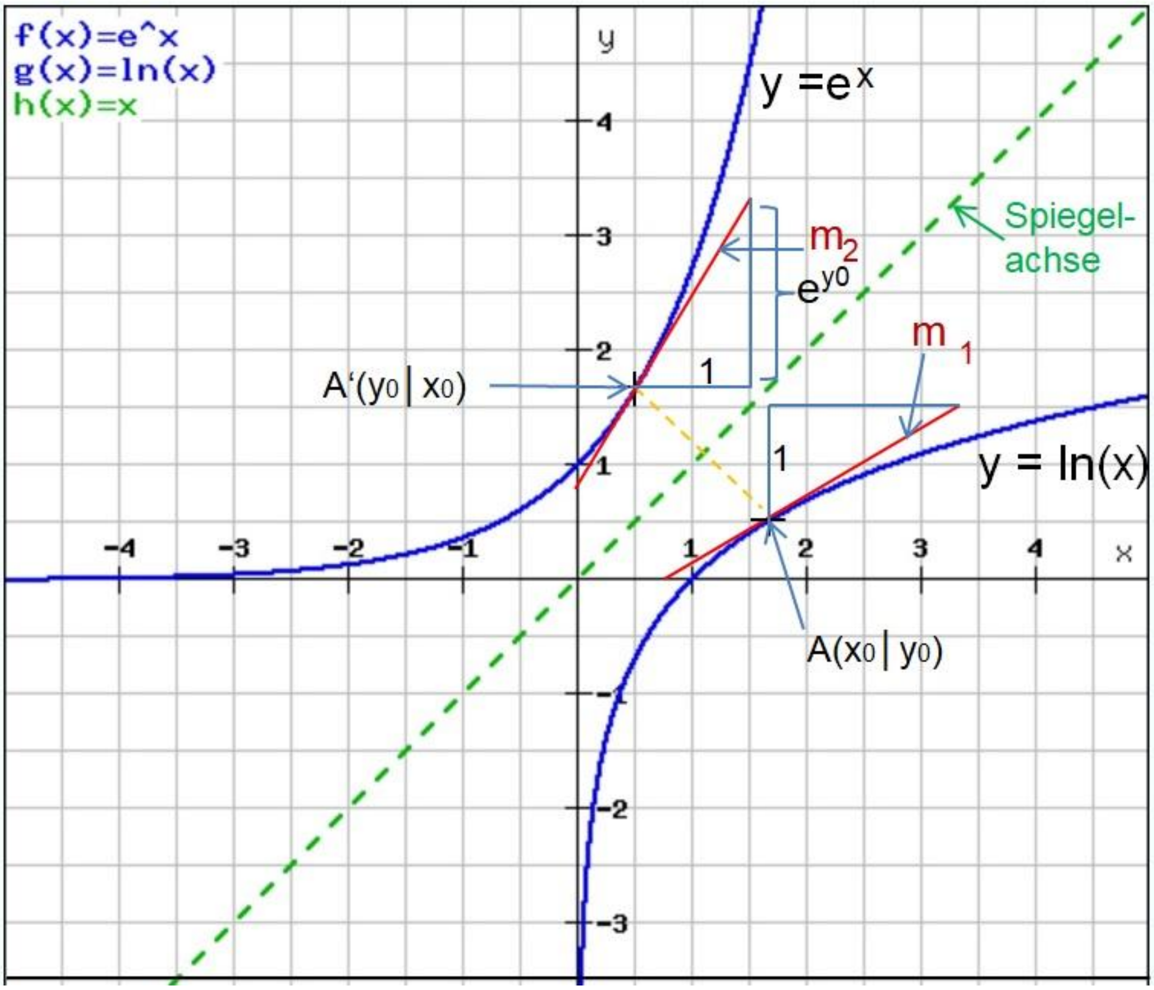
$$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h-0} \frac{e^h-1}{h}$$

Geht h gegen Null, wird e^h = 1 und damit ist die 1. Ableitung

$$\boldsymbol{f'(x) = e^x}$$

Herleitung der 1. Ableitung vom natürlichen Logarithmus ln(x)

Für die Herleitung der 1. Ableitung von ln(x) liefert die folgenden Grafik wert-volle Hinweise.



Zuerst wird der Graph von ln(x) dargestellt. Dann ist die Umkehrfunktion $y = e^x$ und ist die Spiegelung von ln(x) an der grün gezeichneten Spiegelachse y = x.

Ein Punkt auf ln(x) ist $A(x_0 I y_0)$, sein Spiegelpunkt ist A‘ mit vertauschten Koor-dinaten auf der Kurve $y = e^x$, also $A'(y_0 I x_0)$. Die Tangente in A‘ mit der Stei-gung m_2 konstruieren wir aus dem Dreieck $\Delta x = 1$ und $\Delta Y = e^{y0}$. Dieses Dreieck wird gespiegelt und liefert die Tangente in A.

Für die Steigungen gilt: $m_2 = \frac{e^{y_0}}{1}$ und $m_1 = \frac{1}{e^{y_0}}$.

Dann ist $m_1 = \frac{1}{m_2}$

Für die Kurve ln(x) lautet die 1. Ableitung an der Stelle x_0

$$ln'(x_0) = m_1 = \frac{1}{m_2} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{e^{\ln(x_0)}} = \frac{1}{x_0}$$

Allgemein ist die 1. Ableitung von ln(x)

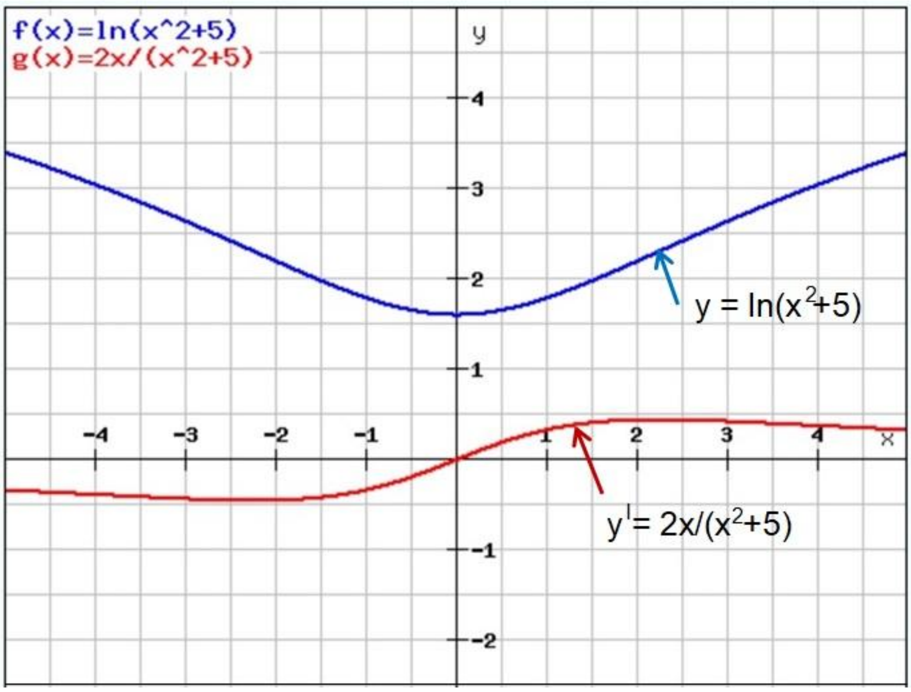
$$\boldsymbol{ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

<u>Beispiel:</u>

$y = \ln(x^2+5)$

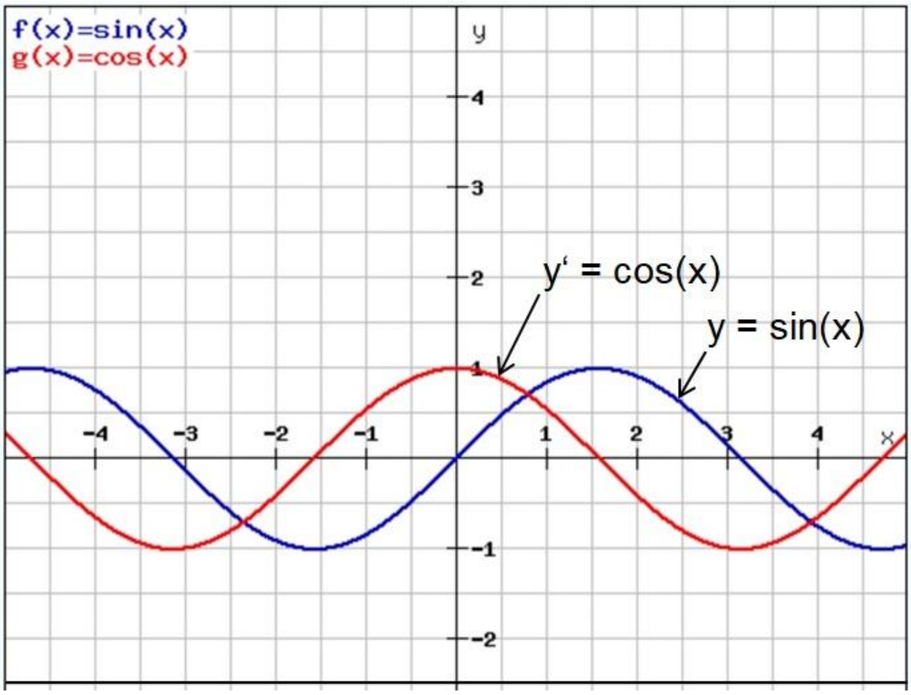
$$y' = \frac{1}{x^2+5} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+5}$$

Graphen:



Herleitung der 1. Ableitung von sin(x)

Die Herleitung der 1. Ableitung von sin(x) wird mit der h-Methode durchgeführt. Die folgende Grafik zeigt den Kurvenverlauf von sin(x) und den Verlauf der 1. Ableitung von sin(x).



$$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{f(x+h) - f(x_x)}{h}$$

Für die 1. Ableitung der sin-Funktion gilt:

$$f'(\sin(x)) = \lim_{h-0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion in der Form

$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$ erhält man

$$f'(\sin(x)) = \lim_{h-0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(\sin(x)) = \lim_{h-0} \frac{\sin(x)\,(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h-0} \frac{\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{h})}{h}$$

Da sin(x) und cos(x) nicht von h abhängen, lautet die Ableitung nun:

$$f'(\sin(x)) = \sin(x) \cdot \lim_{h-0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h-0} \frac{\sin(h)}{h}$$

Im ersten Term nimmt cos(h), wenn h gegen Null geht, den Wert 1 an und damit liefert die Limesbildung den Wert Null.

Im zweiten Term geht der Quotient sin(h)/h gegen den Wert 1, da bei kleiner werdenden h sin(h) etwa genauso groß wie h ist.

Das Ergebnis für die 1. Ableitung von sin(x) ist dann

$$\boldsymbol{f'(\sin(x)) = \cos(x)}$$

Beispiele:

$$y = \sin\sqrt{1 + x^2}$$

$$y' = \cos\sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \sin^3 x$$

$$y' = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$$

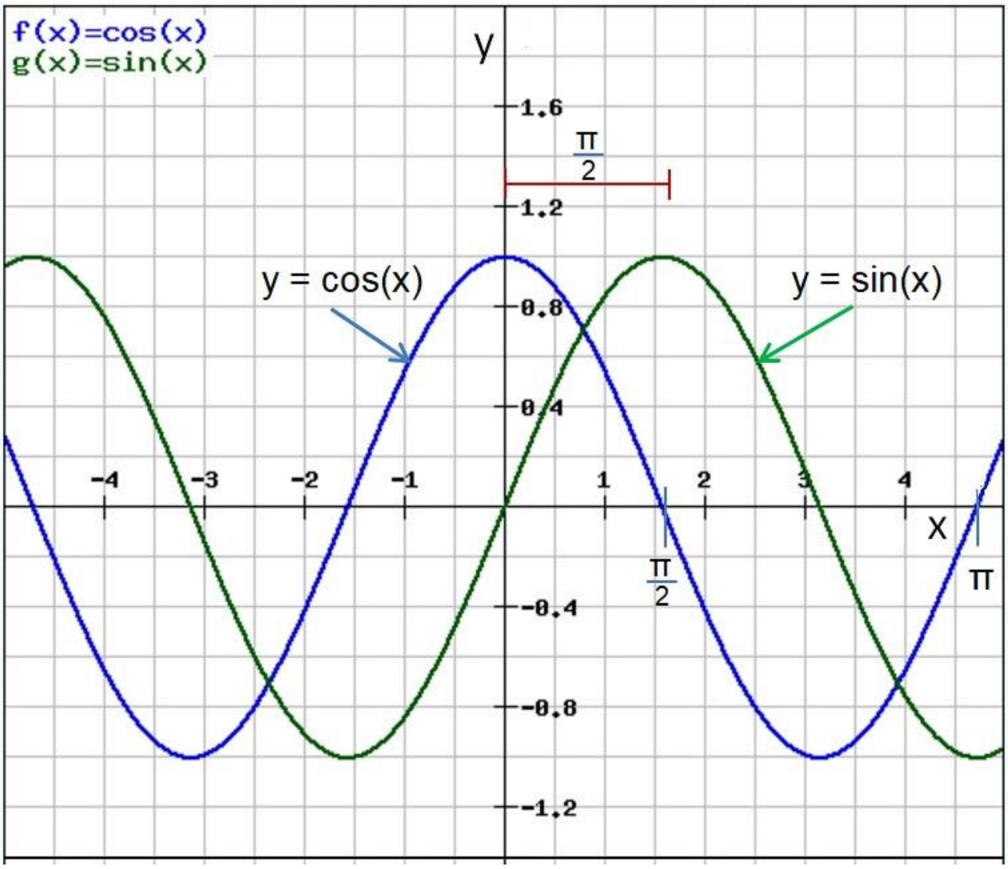
$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot \sin^{-\frac{3}{2}}(x) \cdot \cos(x) = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin^2(x)}}$$

Herleitung der 1. Ableitung von cos(x)

Für die Herleitung der 1. Ableitung von cos(x) wird die Kenntnis der 1. Ableitung herangezogen.

Die Graphen von cos(x) und sin(x) zeigt das folgende Bild:



Verschiebt man die Sinus-Kurve um π/2 nach links, erhält man die Kosinus-Funktion. Es ist also

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Die 1. Ableitung von $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ wird mit der Kettenregel gelöst. Es ist

$v(x) = x + \frac{\pi}{2}$ und $u(v) = \sin(v)$. Die Kettenregel lautet:

$u\big(v(x)\big)' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Die Ableitung von u ist $u'(v) = sin'(v) = \cos(v)$

Die Ableitung von v ist $v'(x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Damit folgt: $u\big(v(x)\big)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1$

Nach einer Verschiebung der Kosinuskurve nach links um π/2 bekommt man die negative Sinuskurve.

Damit lautet das Ergebnis für die 1. Ableitung von cos(x):

$$\boldsymbol{cos'(x) = -\sin(x)}$$

Beispiele:

$y = \cos(2x)$

$y' = -2 \cdot \sin(2x)$

$$y = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{u}{v} \quad =$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

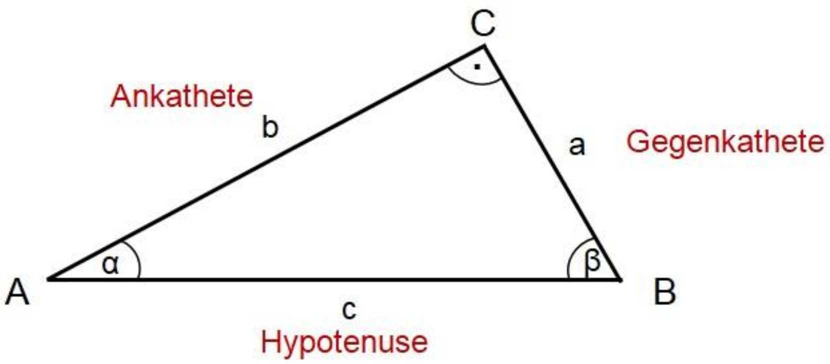
Es ist $u = 1$ und $u' = 0$

$v = cos^2(x)$ und
$v' = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x))$

$$y' = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

Herleitung der 1. Ableitung von tan(x)

Im rechtwinkligen Dreieck



ist tan(α) definiert durch $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{a}}{\text{b}}$

Wegen a = c·sin(α) und b = c·cos(α) ist

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{oder auch} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Die Herleitung der 1. Ableitung von tan(x) wird mit Hilfe der Quotientenregel duchgeführt.

$$f'(x) = \; u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$$

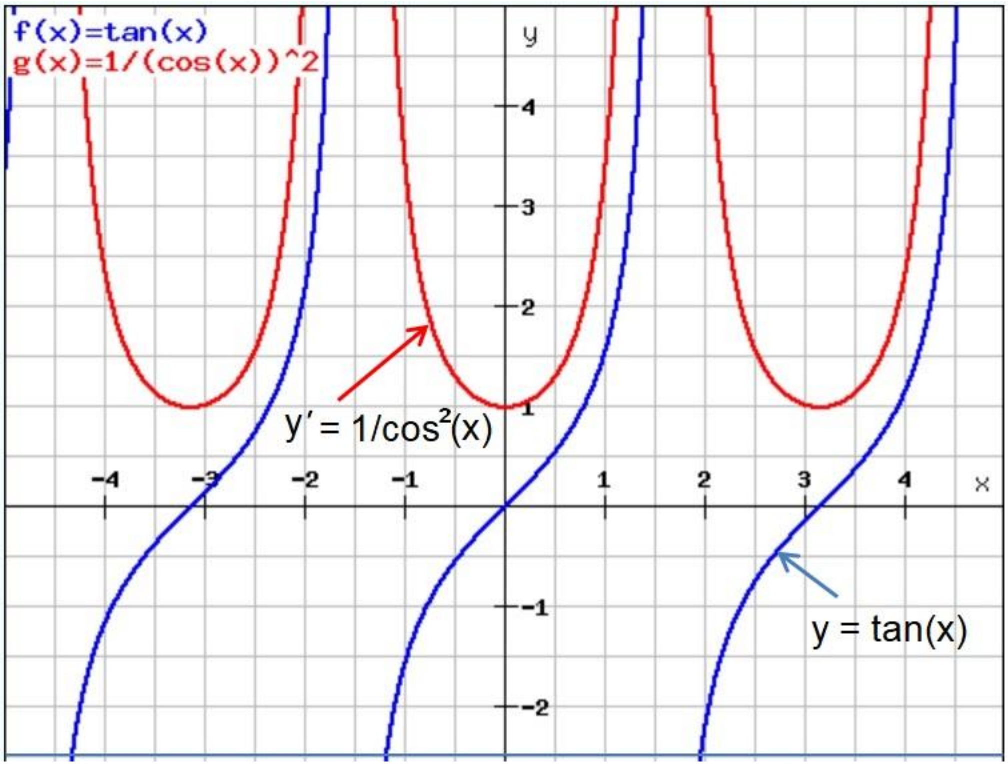
Es ist u(x) = sin(x) u‘(x) = cos(x) und v(x) = cos(x) v‘(x) = - sin(x)

Die 1. Ableitung lautet nun: $f'(x) = \frac{cos^2(x)+ sin^2(x)}{cos^2(x)}$

Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ist, lautet das Ergebnis=

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}}$$

Die Graphen von y = tan(x) und von der 1. Ableitung zeigt das nächste Bild:



Beispiel:

$$y = \tan(2x)$$

$$y' = \frac{2}{cos^2(2x)}$$

Tabelle der 1. Ableitung von wichtigen Funktionen

$f(x) = x^n$ $\quad$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad$ $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$f(x) = e^x$ $\quad$ $f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x)$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$ $\quad$ $f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \tan(x)$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$