Mathematik

Algebra bis zur 10. Klasse

Norbert Meier und Leopold Maria Hermann 2020

Positive und negative Zahlen

-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

Zahlenfolgen

Folge der geraden Zahlen: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16…

Folge der ungeraden Zahlen: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15…

Fibonacci-Folge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…

Primzahlen: 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 …

Quadratzahlen: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121,
144, 169, 196, 225…

Kubikzahlen: 8, 27, 64, 125, 216, 343…

Addition und Subtraktion

3 + 7 + 11 = 21

100 - 15 - 30 + 8 = 63

Multiplikation und Division

3 · 4 = 12

20 : 5 = 4

Rechnen mit Klammern und gemischte Aufgaben

4 · (30 - 5) = 100

Regel: Zuerst den Ausdruck in der Klammer ausrechnen !

-2 · 3 + 11 = -6 + 11 = 5

Regel: Punktrechnung geht vor Strichrechnung !

$2 \cdot 8 + (30 - 5) - 4 \cdot 4 - (10 - 12) = ?$

$16 + 25 - 16 - (-2)$ weiter vereinfachen:

$41 - 16 + 2 = 27$

Regel: „Minus“ mal „Minus“ gibt „Plus“ !

Zahlen in Primfaktoren zerlegen

$210 = 3 \cdot 70$

$= 3 \cdot 2 \cdot 35$

$= 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

Dezimalzahlen

$0{,}5 + 11{,}2 = 11{,}7$

$3{,}002 - 0{,}004 = 2{,}998$

$5{,}06 + 1{,}1 = 6{,}16$

Hinweis: Die Kommastelle ist stets zu beachten

Brüche: Echte Brüche, unechte Brüche und gemischte Zahlen

Ein Bruch besteht aus einem Zähler und einem Nenner:

$$\frac{\textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner}}$$

Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner:

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{19}$

Bei einem unechten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner:

$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

Ein unechter Bruch kann als gemischte Zahl geschrieben werden.

Addition und Subtraktion von Brüchen

Bei Brüchen mit gleichem Nenner wird nur der Zähler berechnet.

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

Bei Brüchen mit ungleichem Nenner muss zuerst von allen verschiedenen Nennern das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) bestimmt werden.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = ?$$

Das kgV von $\{2,3,4,5\}$ ist hier die Zahl 12. Nun muss jeder Bruch erweitert werden mit dem Faktor, der das kgV ergibt.

$$\frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{6+4+10-3}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Multiplikation und Division von Brüchen

Bei der Multiplikation von Brüchen erfolgt die Produktbildung im Zähler und dann im Nenner.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$$

Bei der Division von Brüchen steht im Zähler ein Bruch und im Nenner ein Bruch.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}}$$

Vom Bruch im Nenner muss der Kehrwert gebildet werden und dann wird der Bruch im Zähler mit dem Kehrwert (5/1) des Nenners multipliziert.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Kürzen von Brüchen

Zerlegt man im Zähler und im Nenner die Zahlen in einzelne Faktoren, können die gleichen Faktoren im Zähler und Nenner „paarweise gestrichen werden“.

$$\frac{\mathbf{4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8}}{\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 4}} = \frac{\mathbf{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4}}{\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 4}} = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Potenzen von Zahlen und Ausdrücken

Eine Potenzzahl besteht aus einer Basis und einer Hochzahl (Exponent).

2^3 , 5^2

Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Der folgenden Ausdrücke sind zu berechnen:

$(x+a)^2 = (x+a) \cdot (x+a) = x^2 + 2ax + a^2$

$(x-a)^2 = (x-a) \cdot (x-a) = x^2 - 2ax + a^2 =$

$(x+a) \cdot (x-a) = x^2 - a^2$

Dies sind die drei binomischen Formeln

$\boldsymbol{(a+b)^2} = (a+b) \cdot (a+b) = \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$

$\boldsymbol{(a-b)^2} = (a-b) \cdot (a-b) = \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$

$\boldsymbol{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$

Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren

Bei gleicher Basis werden die Exponenten addiert.

$\mathbf{3^2 \cdot 3^3} = \mathbf{3^{2+3}} = \mathbf{3^5} = 243$

Potenzen mit gleicher Basis dividieren

Bei gleicher Basis werden die Exponenten subtrahiert.

$\mathbf{5^4 / 5^2} = \mathbf{5^{4-2}} = \mathbf{5^2} = 25$

Potenzen mit dem Exponenten 0 ergeben immer den Wert 1

Beispiel:

$7^0 = 1$, $2^0 = 1$ usw.

Beweis: Zum Beispiel ist

$\frac{\mathbf{7^3}}{\mathbf{7^3}} = 1 = 7^{3-3} = 7^0$

Zahlenfolge mit Potenzen von 2

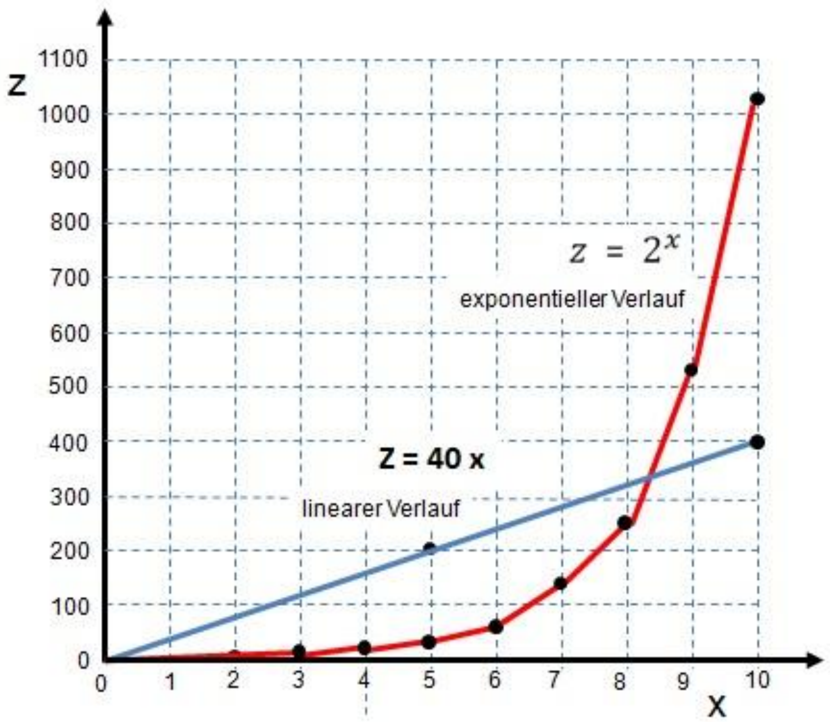
Die Zahlen z werden gebildet mit der Formel

$\boldsymbol{z = 2^x}$

Die Zahlen für x beginnen mit 0, 1, 2, 3, 4 ,5 usw.

Die Zahlenfolge für z lautet dann:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024…



Beim linearen Verlauf ist der Zuwachs immer gleich. Dagegen steigen die Werte beim exponentiellen Verlauf erst langsam an, aber dann wird die Zuwachsrate immer größer.

Das Schachbrett mit den Reiskörnern

Ein schlauer Inder sollte seinem Maharadscha das Schachspielen beibringen und wünschte sich als Belohnung nur Reiskörner. Die Summe der Reiskörner möge, wie auf einem Schachbrett im ersten Feld mit 1 beginnen, dann 2 Reiskörner auf dem 2. Feld und dann 4 auf dem 3. Feld. Es findet also immer eine Verdoppelung der Anzahl der Körner zum nächsten Feld statt.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	?						
A							
B							
C							

Von Feld zu Feld nimmt die Anzahl der Reiskörner exponentiell zu. Auf das Feld mit dem Fragezeichen kommt die Anzahl:

$? = 2^{10} = 1024$

$A = 2^{17} = 131\,072$

$B = 2^{25} = 33\,554\,432$

$C = 2^{33} = 8\,589\,934\,592$

Auf dem letzten Feld gehört die Anzahl Reiskörner:
$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$

Zins- und Zinseszinsrechnung

Wenn man ein Anfangskapital auf der Bank einzahlt und einen Zinssatz von 4 % erhält, erhöht sich das Kapital nach einem Jahr auf

$K_{Ende} = K_{Anfang} \cdot (1 + p/100)$

Bei monatlicher Verzinsung erhält man nach M Monat

$K_{Ende} = K_{Anfang} \cdot (1 + p/100) \cdot M/12$

Bei einer täglichen Verzinsung erhält man nach T Tagen

$K_{Ende} = K_{Anfang} \cdot (1 + p/100) \cdot T/360$

Bei der Zinseszinsrechnung wird n jahrelang mit dem Zinssatz p verzinst, sodass am Ende jedes Jahres der fällige Zins zum Kapital addiert wird. Am Ende des n-ten Jahres ergibt sich ein Kapital von

$K_{Ende} = K_{Anfang} \cdot (1 + p/100)^n$

Beispiel:

Wird bei der Geburt eines Kindes 1 Euro mit einem Zinssatz von p = 3 % auf ein Sparkonto einbezahlt, so würde nach einer Lebensdauer von 85 Jahren das Endkapital

$K_{Ende} = K_{Anfang} \cdot (1 + 3/100)^{85}$ = 12.335,00 Euro

betragen.

Rechnen mit Wurzeln

Eine Zahl mit einer Wurzel multiplizieren

$4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} = 6{,}928$

Man schreibt den Faktor einfach vor den Wurzelausdruck.

Wurzeln miteinander multiplizieren

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Wurzeln miteinander dividieren

$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Aufgaben mit Wurzeln

$\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\sqrt{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{25}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{4}}}{\sqrt{\mathbf{25}}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$\sqrt{\frac{\boldsymbol{x^2 - 4}}{\boldsymbol{x+2}}} = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{x+2})\cdot(\boldsymbol{x-2})}{(\boldsymbol{x+2})}} = \sqrt{x-2}$

Wurzeln ausklammern

$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = \sqrt{b}\,(a + c)$

Logarithmen zur Basis 10

Eine große Zahl z soll als Potenz mit der Basis 10 und dem Exponenten x, also als $\mathbf{10^x}$, geschrieben werden. Dann gilt auch

z = $\mathbf{10^x}$

Eine Auflösung nach x ist der Logarithmus von z zur Basis 10.

$x = log_{10}\, z$

Beispiel:

z = 3200 $\quad x = log_{10}\, 3200 = 3{,}5052$

Beispiel mit einem Produkt aus drei großen Zahlen:

Gegeben sind Z1 = 4850, Z2 = 6230 und Z3 = 22460

Das Produkt wird nun mit Hilfe von Logarithmen berechnet:

$$x1 = log_{10}\, 4850 = 3{,}685$$

$$x2 = log_{10}\, 6230 = 3{,}794$$

$$x3 = log_{10}\, 22460 = 4{,}351$$

x1 + x2 + x3 = 11,830

$10^{11{,}830} = 6{,}7608^{11}$ ist das Ergebnis.

Führe die Berechnung mit dem Taschenrechner durch, das Ergebnis ist etwas größer $6{,}7864013^{11}$.

Warum ?

Die Gesetze für den Logarithmus zur Basis 10 lauten:

$$\log(a \cdot b) \;=\; \log(a) + \;\log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) \;=\; \log(a) - \;log(b)$$

$$log(a^n) \;=\; \mathrm{n} \cdot log(a)$$

$$log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \ln\,(a)$$

Der natürlicher Logarithmus

Bei einem natürlichen Logarithmus ist die Basis die Zahl e. Diese „Euler-sche Zahl“ ist eine Konstante und hat den Wert 2,71281828459…

Beispiel:

ln4200 = 8,342

Es lauten die Gesetze für den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

$$ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \cdot \ln(a)$$

Taschenrechner für die Schule

Die Firma Texas Instruments bietet einen preisgünstigen Taschenrechner (ca. 15 €) für die Schule an. Dieser Rechner TI-30 ECO RS hat ein deutlich gegliedertes Tastenfeld.

Berechne mit deinem Taschenrechner:

$log 4200$, $\ln 4200$, $\sqrt{4200}$, $\sqrt[3]{760}$,

25^2, 5^4, $\frac{1}{750}$, $3 \cdot \sqrt{(15^2 - 13)}$,

$4 + 2 \cdot (3^3 - 12)$

Lineare Gleichungen

Die Variable ist meistens x und tritt nur mit dem Exponenten 1 auf.
Beispiel für eine lineare Gleichung:

$4 * (x - 3) = 15x + 2$

Die Umformung besteht nun darin, zuerst die Terme auszurechnen und dann die Gleichung umzuordnen bis x allein auf der linken Seite der Gleichung steht.

$4x – 12 = 15x + 2 \mid – 4x$ 1. Umformung

$-12 = 11x + 2 \mid -2$ 2. Umformung

$-14 = 11x \mid :11$ 3. Umformung

$x = - 14 / 11 = - 1,2727…$ Ergebnis

Aufgabe:

$3 (x – 1) = 20 + 1/3$

$3x – 3 = 20 + 1/3 \mid *3$ 1. Umformung

$9x – 9 = 60 + 1 \mid +9$ 2. Umformung

$9x = 52 \mid :9$ 3. Umformung

$X = 52/9 = 5, 777…$ Ergebnis

Aufgaben:

1. $6x + 12 = 2x + 30$
2. $12x + 8 + 2x = 20 – 8x + 144$
3. $2x –(2 + 4x) = 32 - 2(4x – 8)$

Quadratische Gleichungen

Die Variable tritt auch mit dem Exponenten 2 auf.

Den pq-Gleichungstyp

$\boldsymbol{x^2}$ **+ px + q =0**

bezeichnet man als Normalform einer quadratischen Gleichung

Die allgemeine Lösung lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 - q}$$

oder auch

$$= -\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}} \pm \sqrt{\frac{\boldsymbol{p^2 - 4\,q}}{\boldsymbol{4}}} = -\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$x_{1,2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \cdot \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

Wir rechnen meistens mit der Normalform !

Beispiel:

x^2 + 3x + 2 = 0

Es ist also p = 3 und q = 2

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

Probe durch Einsetzen mit x1 = -2 ergibt: 4 - 6 + 2 = 0, also richtig

Probe durch Einsetzen mit x2 = -1 ergibt: 1 - 3 + 2 = 0, also richtig

Aufgaben zum Rechnen:

$$x^2 + 13x + 32 = 0$$

$$(2x-8)^2 = 400$$

Der Satz von Vieta

Wenn von der quadratischen Gleichung in der Normalformal

$x^2 + px + q = 0$

die Lösungen x_1 und x_2 sind, dann gilt

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = 0 \\ &= x^2 - x \cdot (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit p und q liefert folgenden Zusammenhang, den man den Satz von Vieta nennt:

$p = -(x_1 + x_2)$

$q = x_1 \cdot x_2$

Gleichungen von Geraden

Die allgemeine Form von Funktionen mit zwei Variablen könnte lauten:

$ax + by + c = 0$

Eine Auflösung nach y ist dann

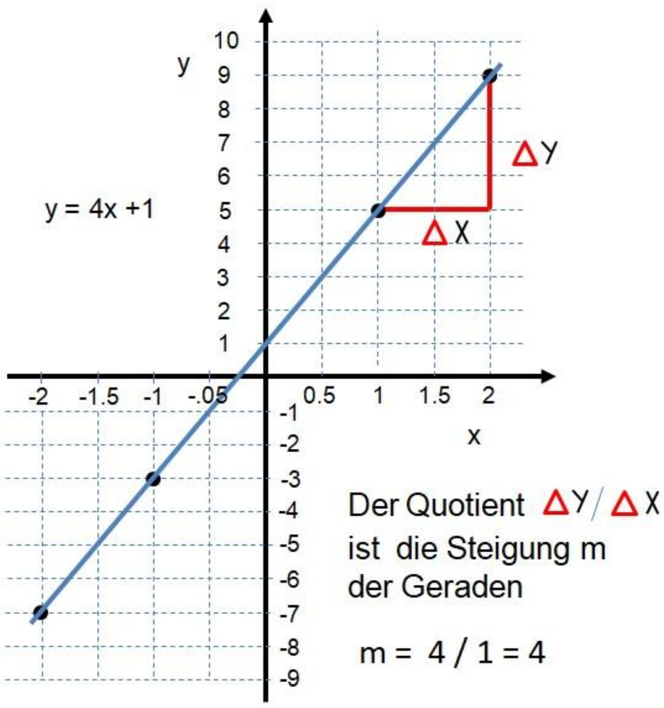
$y = a/b \cdot x + c/b = 0$ oder auch

$y = mx + n$ ist die Normalform

m ist die Steigung und n ist der Schnittpunkt P(0,n) auf der y-Achse.

Beispiel:

$y = 4x + 1$



Die Punkt-Steigungs-Formel einer Geraden

Gegeben ist ein Punkt $P(x_1,y_1)$ im x,y Koordinatenkreuz und die Steigung m.

Die allgemeine Formel, wenn Punkt und Richtung m der Geraden gegeben sind lautet:

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

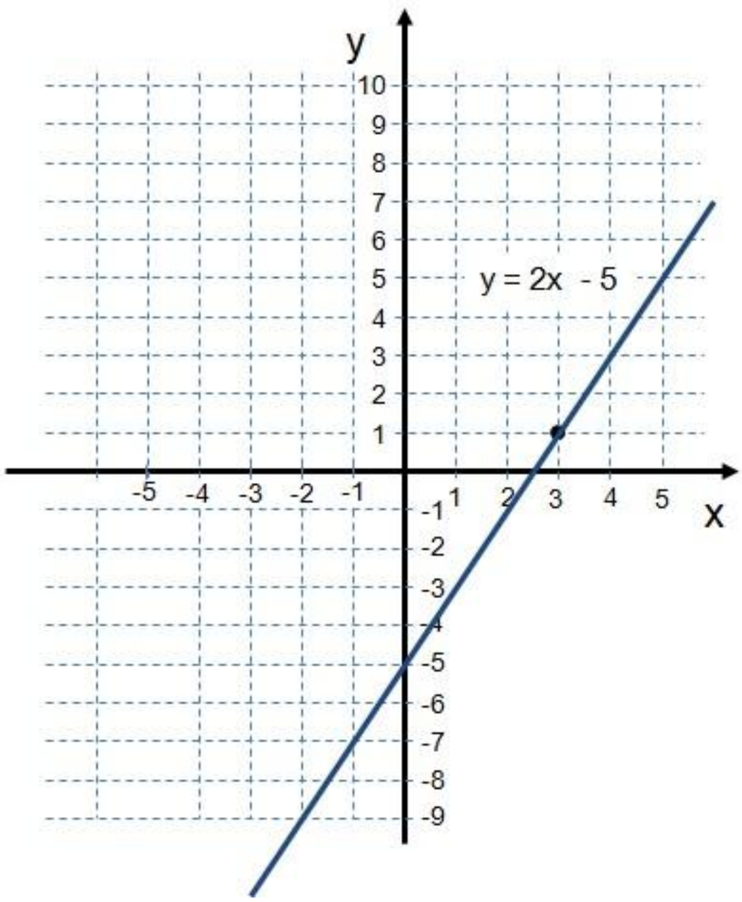
Beispiel: Gegeben ist der Punkt P mit den Koordinaten (3,1) und die Steigung ist m = 2.

Die Geradengleichung ist zu berechnen.

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 3)$$

$$y = 2x - 5$$

Diese Gerade mit dem Punkt P(3,1) ist zu zeichnen.



Die Zwei-Punkte-Formel einer Geraden

Gegeben sind zwei Punkte P1(x_1,y_1) und P2(x_2,y_2) im x,y-Koordinatensystem . Mit den zwei Punkten ist die Gerade eindeutig definiert.

Die Zwei-Punk-Formel lautet:

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot (x - x_1)$$

Man sieht sofort, die Steigung m ist:

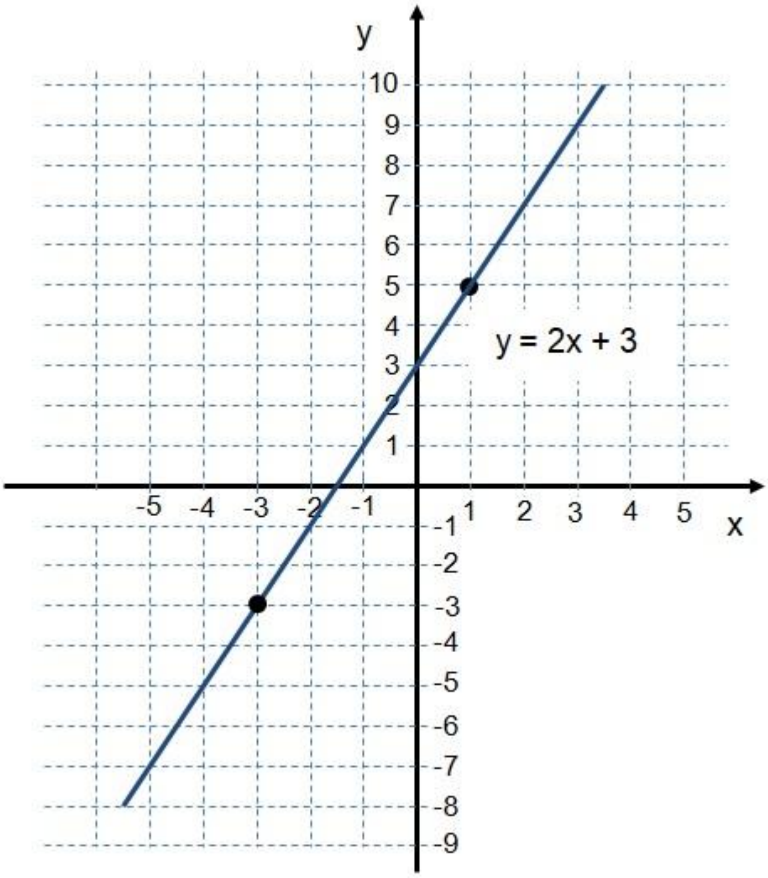
$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Aufgabe:

Die beiden Punkte haben die Koordinaten P1(-3,-3) und P2(1,5), es folgt

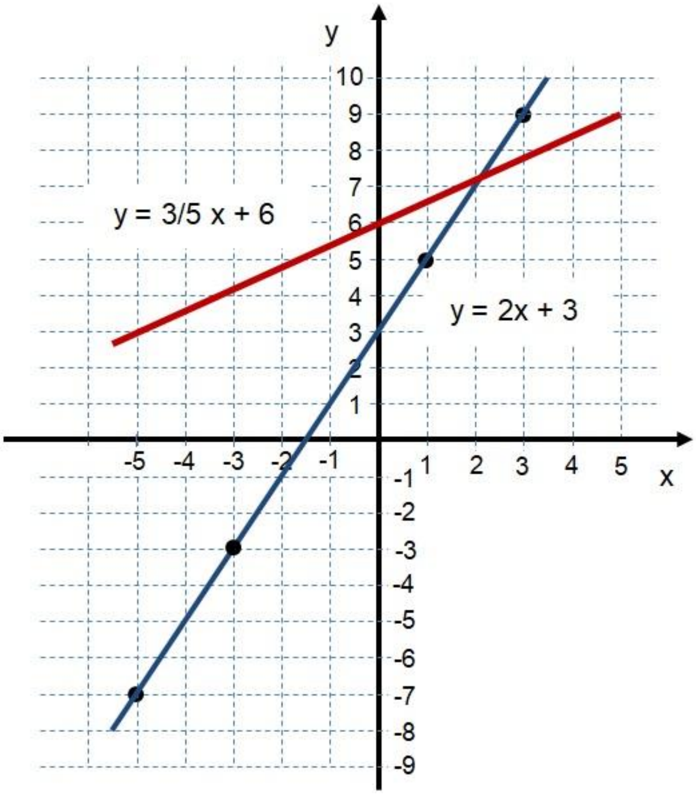
$y + 3 = \frac{\mathbf{(5+3)}}{\mathbf{(1+3)}}$ (x + 3)

Y = 2x + 3



Zwei Geraden mit einem Schnittpunkt

Gegeben ist das folgende Schaubild:



Der Schnittpunkt $S(x_s,y_s)$ der beiden Geraden ist zu berechnen.

$y_s = \frac{3}{5} x_s + 6$

$y_s = 2x_s + 3$

$\frac{3}{5} x_s + 6 = 2x_s + 3 \quad | \cdot 5$

$3x_s + 30 = 10x_s + 15$

$7x_s = 15$

$x_s = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ und $y_s = \frac{3 \cdot 15}{5 \cdot 7} + 6 = \frac{9}{7} + 6 = 7\frac{2}{7}$

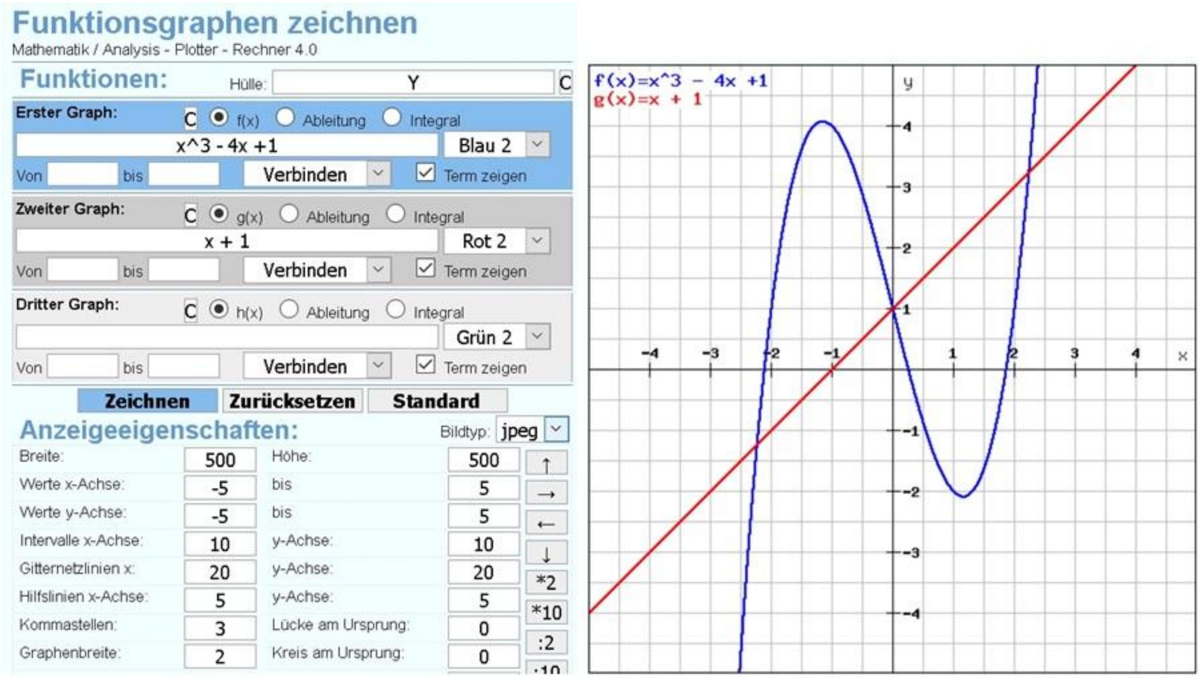
Ergebnis: Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten

$x_s = 2\frac{1}{7}$ und $y_s = 7\frac{2}{7}$

Programm für mathematische Kurvendarstellungen

Im Internet findet man mehrere Grafikprogramme für die Kurven-darstellung.

Eine Onlineanwendung bietet das Programm „Funktionsgraphen zeichnen“, das sich sehr leicht bedienen lässt:



Gezeigt wird z.B. eine Kurve 3. Grades mit einem Wendepunkt, zwei Maxima und drei Nullstellen und eine Gerade, die durch den Wende-punkt verläuft.

Die beiden Funktionsgleichungen lauten:

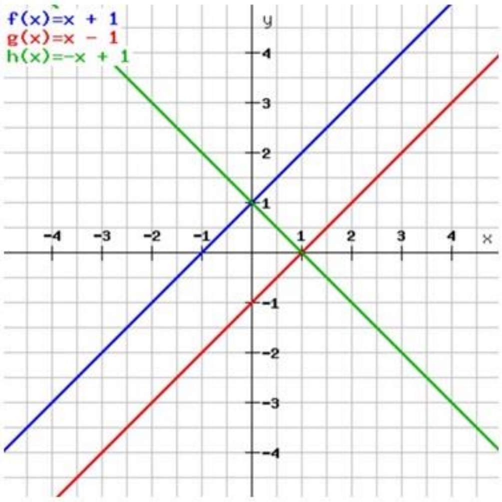
$y = x^3 - 4x + 1$ und $y = x + 1$

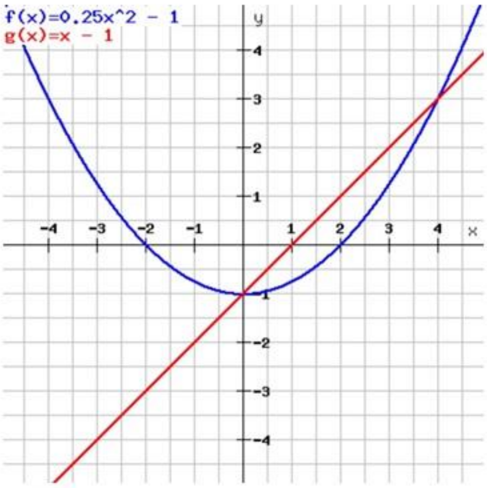
Das Programm kann über die folgende Internetadresse gestartet werden:

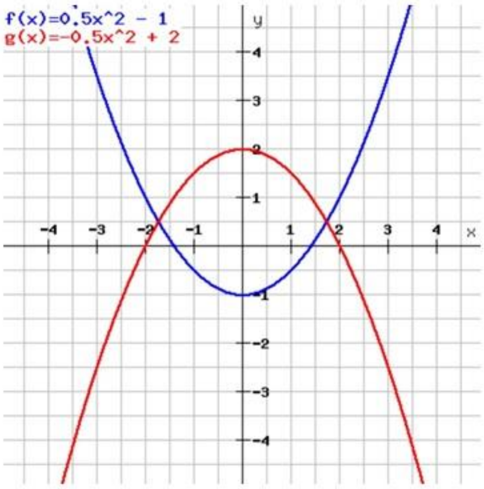
www.rechneronline.de/funktionsgraphen

1. Beispiel: Zwei parallele Geraden und eine senkrechte Gerade.
2. Beispiel: Eine Parabel mit einer Geraden durch den Scheitelpunkt.
3. Beispiel: Zwei sich schneidende Parabeln

Funktionsgraphen der drei Beispiele:







Zusatzaufgabe:

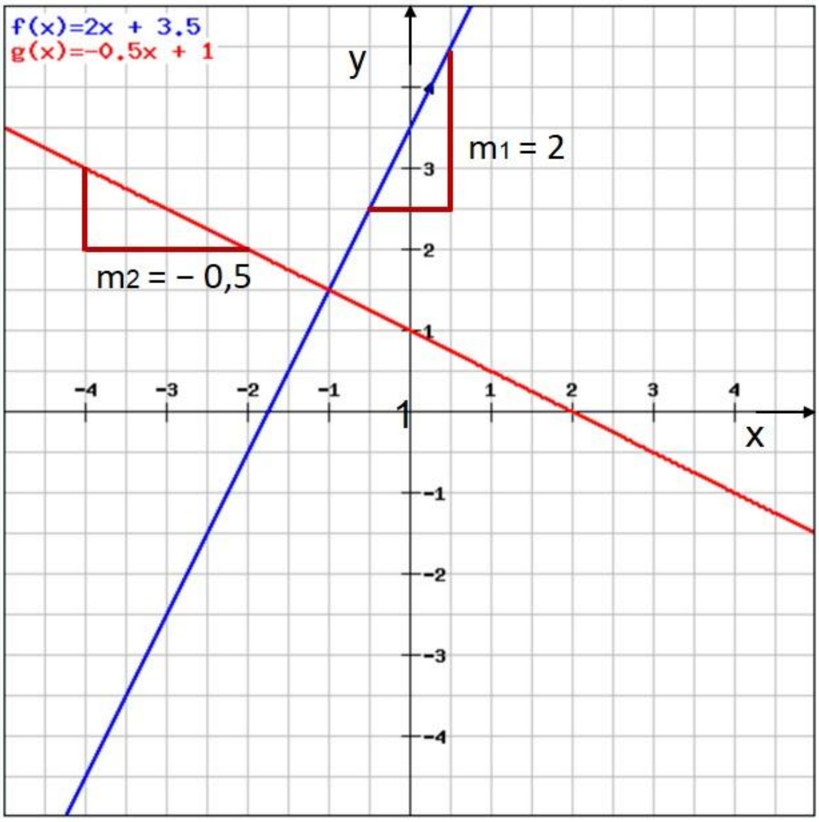
Die Schnittpunkte in den Abbildungen sind zu berechnen.

Zwei sich senkrecht schneidende Geraden

Die Grafik zweigt sich rechtwinklig schneidende Geraden im Punkt P(1I1,5)

Für die blaue Gerade lautet die Funktionsgleichung Y = 2x + 3,5 mit der Steigung $m_1 = 2$.

Die rote Gerade ist definiert durch y = −0,5x + 1 und besitzt die Steigung $m_2 = -0{,}5$



Wenn zwei Geraden sich kreuzen, gilt für ihre Steigungen m_1 und m_2

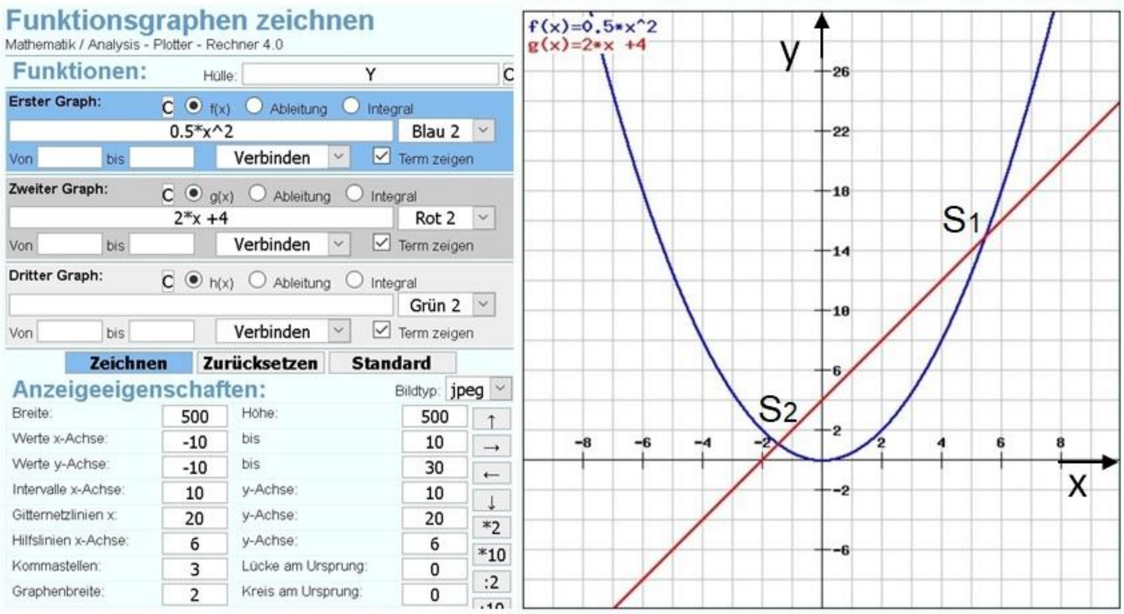
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

oder auch

$$m_2 = = -1/m_1$$

Gerade und Parabel mit zwei Schnittpunkten

Einer Gerade y = 2x + 4 und eine Parabel y = 0,5x^2 schneiden sich in den Schnittpunkten S_1 und S_2



Aufgabe:

Die Koordinaten von beiden Schnittpunkt S1(x_{s1},y_{s1}) und S2(x_{s2},y_{s2}) sind zu berechnen.

Die Bestimmungsgleichungen für beide Schnittpunkte lauten:

$$y_s = 2x_s + 4$$

$$y_s = 0{,}5{x_s}^2$$

Durch Gleichsetzung erhält man: $2x_s + 4 = 0.5{x_s}^2$

Daraus folgt die quadratische Gleichung: ${x_s}^2 - 4x_s - 8 = 0$

Mit den Lösungen:

$$x_{s1,s2} = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm \sqrt{12} = 2(1 \pm \sqrt{3})$$

$$x_{s1} = 2(1+\sqrt{3}) \approx 5{,}46 \text{ und } y_{s1} = 2 \cdot 2\left(1+\sqrt{3}\right) + 4 = 4\left(2+\sqrt{3}\right) \approx 14{,}9$$

$$x_{s2} = 2(1-\sqrt{3}) \approx -1{,}46 \text{ und } y_{s2} = 4\left(1-\sqrt{3}\right) + 4 = 4\left(2-\sqrt{3}\right) \approx -1{,}07$$

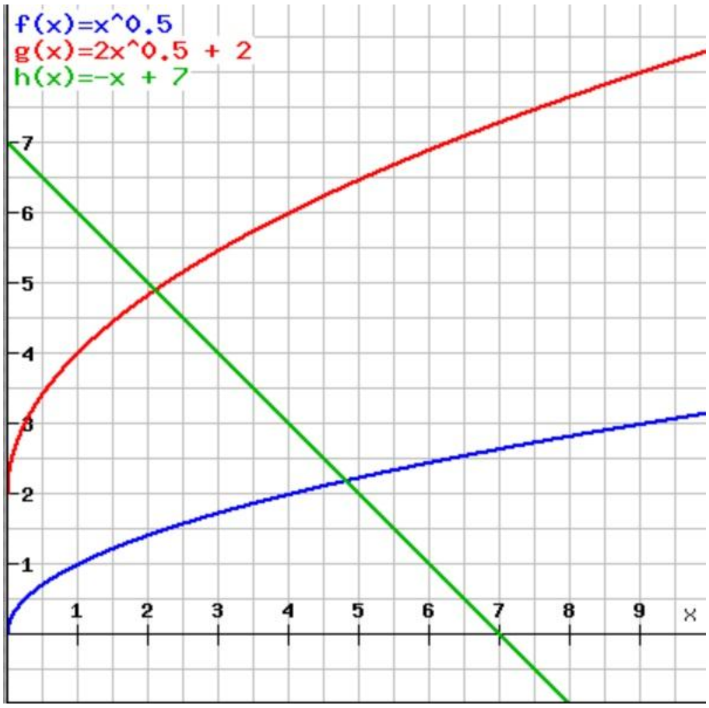
Graphische Darstellung von Wurzelfunktionen

Die Graphen folgender Wurzelfunktionen sind darzustellen:

$y = \sqrt{x}$

$y = 2\sqrt{x} + 2$

$y = -x + 7$

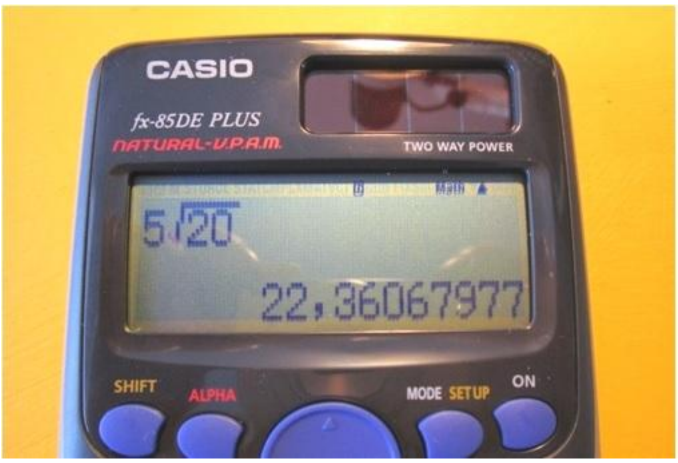


Aufgabe: Die beiden Schnittpunkte sind zu berechnen.

Taschenrechner von Casio

Der Rechner von CASIO mit der Bezeichnung „fx-85DE Plus“ erlaubt es, auf einem größeren Display Berechnungen mit Wurzelzeichen und Bruchstrichen einzugeben.

Beispiel mit angenähertem Zahlenwert:



Übersicht der Dokumentationen

„Algebra bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mathe/Algebra.pdf

„Geometrie bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mathe/Geometrie.pdf

„Trigonometrie bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mathe/Trigonometrie.pdf

„Elektrizitätslehre bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Elektro/Elektrizitätslehre.pdf

„Mechanik bis zur 10. Klasse“

siehe www.normei-weinheim.de/Mechanik/Mechanik.pdf